4

Глава четвертая

Организационно-экономическая система управления материальными запасами промышленных корпоративных систем

Термин «логистика» происходит от фр. «*loger*» (размещение, расквартирование); употребляется в военной терминологии для определения движения военных грузов, их складирования и размещения, а также для описания процесса размещения и расквартирования военных подразделений. В настоящее время этот термин широко используется в деловом мире и определяет теорию и практику движения сырья, материалов, комплектующих изделий, производственных, трудовых и финансовых ресурсов, готовой продукции от их источников к потребителям.

ЛОГИСТИКА — наука о планировании, управлении и контроле за движением материальных, информационных и финансовых ресурсов в различных производственно-экономических системах. Предмет логистики — комплексное управление всеми материальными и нематериальными потоками в таких системах. Новизна концепции логистики в области управления промышленными системами состоит во всестороннем подходе к вопросам движения материальных благ в процессе производства и управления. Логистическая система должна: охватывать и согласовывать процессы производства, закупок и распределения продукции; быть основой при стратегическом планировании и прогнозировании. Итак, логистика — это экономическая дисциплина, занимающаяся оптимальной организацией материальных, финансовых и информационных потоков.

Одна из основных составляющих логистики — теория управления запасами. Сколько товара держать на складе? Много — будут омертвляться оборотные средства, вложенные в запас. Мало — слишком часто надо будет заниматься получением новых партий товара и нести соответствующие расходы. Значит, надо рассчитать и использовать оптимальный размер запаса. А для этого необходимо построить соответствующую математическую модель. Начнем главу с рассмотрения основных подходов к экономико-математическому моделированию логистических процессов.

4.1. Базовые модели управления запасами

Управление запасами (материально-техническое снабжение) — неотъемлемая часть работы фирм и организаций. Речь идет о запасах сырья, топлива, материалов, инструментов, комплектующих изделий, полуфабрикатов, готовой продукции на промышленном (или сельскохозяйственном) предприятии, о запасах товаров на оптовых базах, складах магазинов, на рабочих местах продавцов, наконец, у потребителей. Запасы постоянно расходуются и пополняются по тем или иным правилам, принятым на предприятии. Оптимизация этих правил, т. е. оптимальное управление запасами, дает большой экономический эффект.

Математическая теория управления запасами — крупная область экономико-математических исследований, получившая свое развитие начиная с пятидесятых годов XX века. Предложенная еще в 1915 г. Ф. Харрисом классическая модель теории управления запасами, называемая также моделью Вильсона (поскольку получила известность после публикации работы Р.Г. Вильсона в 1934 г.) — один из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической области. Формула оптимального размера заказа, полученная в модели Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции. Она практически полезна для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносит заметный экономический эффект [11]. Рассмотрим эту модель подробнее.

Классическая модель управления запасами. Пусть $y(t)$ — величина запаса некоторого товара на складе в момент времени t, $t \geq 0$. Дефицит не допускается, т. е. $y(t) \geq 0$ при всех t. Товар пользуется равномерным спросом с интенсивностью μ , т. е. за интервал времени Δt со склада извлекается и поступает потребителям часть запаса величиной $\mu\Delta t$. В моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополняется запас на складе — приходят поставки величиной Q_0, Q_1, Q_2,… соответственно. Таким образом, изменение во времени величины запаса $y(t)$ товара на складе изображается зубчатой ломаной линией (рис. 4.1), состоящей из наклонных и вертикальных звеньев, причем наклонные отрезки параллельны.

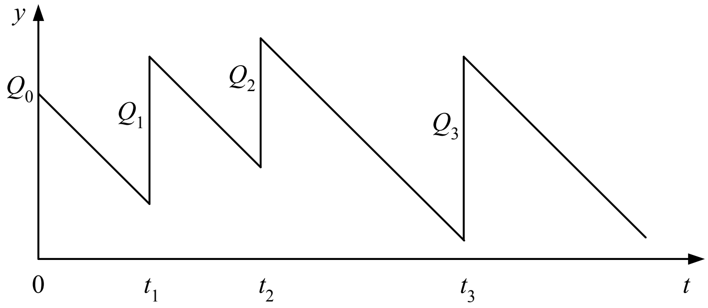

Рис. 4.1. График изменения величины $y(t)$ запаса на складе в момент времени t

Таким образом, в момент t_i величина запаса на складе $y(t)$ скачком увеличивается на Q_i. Следовательно, функция $y(t)$ имеет разрывы в точках t_1, t_2,… Для определенности будем считать, что эта функция непрерывна справа.

Пусть s — плата за хранение единицы товара в течение единицы времени. Поскольку можно считать, что величина запаса $y(t)$ не меняется в течение интервала времени $(t;\ t+dt)$, где dt — дифференциал, т. е. бесконечно малая, то плата за хранение всего запаса в течение этого интервала времени равна $sy(t)dt$. Следовательно, затраты за хранение в течение интервала времени $[0;T)$, где T — интервал планирования, пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности s) площади под графиком уровня запаса на складе $y(t)$ и равны

$$s\int_0^T y(t)dt\,.$$

Пусть g — плата за доставку одной партии товара. Примем для простоты, что она не зависит от размера поставки. Позже покажем, что если эта плата равна $g+g_1Q$, где Q — размер поставки, то оптимальный план поставки — тот же, что и при отсутствии линейного члена. Будет проанализирована и более сложная модель, в которой предусмотрена скидка с ростом поставки, приводящая к выражению $g+g_1Q+ g_2Q^2$ для платы за доставку одной партии товара размером Q.

Пусть $n(T)$ — количество поставок, пришедших в интервале $[0;T)$. При этом включаем поставку в момент $t = 0$ и не включаем поставку в момент $t = T$ (если такая поставка происходит). Тогда суммарные издержки на доставку товара равны $gn(T)$. Следовательно, общие издержки (затраты, расходы) за время T равны

$$F(T;\,y) = F(y(t),\,0 \le t < T) = gn(T) + s\int_0^T y(t)dt.$$

Запись $F(T;\,y) = F(y(t),\,0 \le t < T)$ означает, что общие издержки зависят от значений функции $y = y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Символ y обозначает функцию как целое. То есть область определения $F(T;y)$ при фиксированном T — не множество чисел, а множество функций.

Общие издержки, очевидно, возрастают при росте горизонта планирования T. Поэтому часто используют средние издержки, приходящиеся на единицу времени. Средние издержки за время T равны

$$f(T;\,y) = f(y(t),\,0 \le t < T) = \frac{1}{T}(T;\,y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + s\int_0^T y(t)dt\right\}.$$

Поскольку товар отпускается со склада с постоянной интенсивностью (скоростью), дефицит не допускается, то доходы от работы склада пропорциональны горизонту планирования, средние доходы постоянны. Следовательно, максимизация прибыли эквивалентна минимизации издержек или средних издержек.

Если задать моменты прихода поставок и величины партий, то будет полностью определена функция $y = y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Верно и обратное — фиксация функции $y = y(t)$, $0 \le t < T$ рассматриваемого вида (рис. 4.1) полностью определяет моменты прихода поставок и величины партий. И то, и другое будем называть *планом* поставок или планом работы системы управления запасами. Для ее оптимизации необходимо выбрать моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополнения запаса на складе и размеры поставляемых партий товара Q_0, Q_1, Q_2,… так, чтобы минимизировать средние издержки $f_T(y)$ при фиксированном T. Модель производственной ситуации (т. е. работы склада) описывается четырьмя параметрами — μ (интенсивность спроса), s (стоимость хранения единицы продукции в течение единицы времени), g (стоимость доставки партии товара), T (горизонт планирования).

Решение задачи оптимизации. Поставленная задача оптимизации работы склада интересна тем, что неизвестно число $2n(T)$-1 параметров, определяющих план поставок. Поэтому ее решение не может быть проведено с помощью стандартных методов теории оптимизации.

Решим эту задачу в три этапа. На первом установим, что оптимальный план следует искать среди тех планов, у которых все зубцы доходят до оси абсцисс, т. е. запас равен 0 в момент доставки очередной партии. Цель второго этапа — доказать, что все зубцы должны быть одной и той же высоты. Наконец, на третьем находим оптимальный размер поставки.

Оптимальный план. Найдем наилучший план поставок. План, для которого запас равен 0 (т. е. $y(t) = 0$) в моменты доставок очередных партий, назовем *напряженным.*

Утверждение 1. Для любого плана поставок, не являющегося напряженным, можно указать напряженный план, для которого средние издержки меньше.

Покажем, как можно от произвольного плана перейти к напряженному плану, уменьшив при этом издержки. Пусть с течением времени при приближении к моменту t_1 прихода поставки Q_1 уровень запаса не стремится к 0, а лишь уменьшается до $y(t_1-) \neq 0$ (где знак «минус» означает предел слева функции $y(t)$ в точке t_1). Тогда рассмотрим новый план поставок с теми же моментами поставок и их величинами, за исключением величин поставок в моменты $t = 0$ и $t = t_1$. А именно, заменим Q_0 на $Q_{01} = Q_0 — y(t_1\text{-})$, а Q_1 на $Q_{11} = Q_0 + y(t_1\text{-})$. Тогда график уровня запаса на складе параллельно сдвинется вниз на интервале (0; t_1), достигнув 0 в t_1, и не изменится правее точки t_1. Следовательно, издержки по доставке партий не изменятся, а издержки по хранению уменьшатся на величину, пропорциональную (с коэффициентом пропорциональности s) площади параллелограмма, образованного прежним и новым положениями графика уровня запаса на интервале (0; t_1) (см. рис. 4.2).

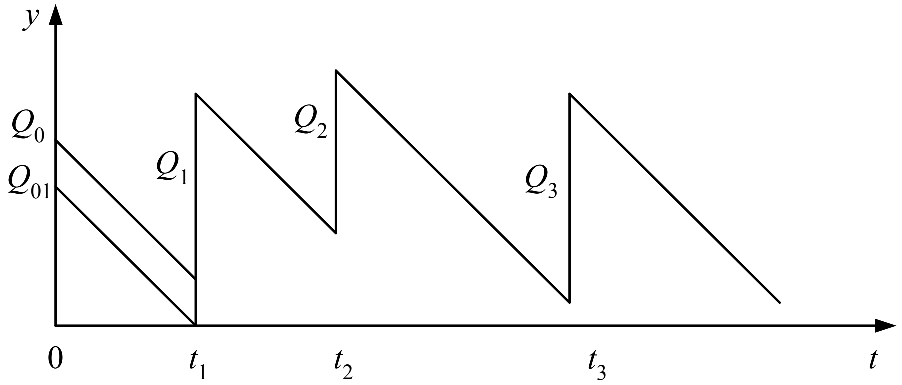

Рис. 4.2. Первый шаг перехода к напряженному плану

В результате первого шага перехода получен план, в котором крайний слева зубец достигает оси абсцисс. Следующий шаг проводится аналогично, только момент времени $t = 0$ заменяется на $t = t_1$. Если есть такая возможность, второе наклонное звено графика уровня запаса на складе параллельно сдвигается вниз, достигая в крайней правой точке t_2 оси абсцисс.

Аналогично поступаем со всеми остальными зубцами, двигаясь слева направо. В результате получаем напряженный план. На каждом шагу издержки по хранению либо сокращались, либо оставались прежними (если соответствующее звено графика не опускалось вниз). Следовательно, для полученного в результате описанного преобразования напряженного плана издержки по хранению меньше, чем для исходного плана, либо равны (если исходный план уже являлся напряженным).

Утверждение 1. Оптимальный план следует искать только среди напряженных планов, т. е. план, не являющийся напряженным, не может быть оптимальным.

Утверждение 2. Среди напряженных планов с фиксированным числом поставок минимальные издержки имеет тот, в котором все интервалы между поставками равны.

При фиксированном числе поставок затраты на доставку партий не меняются. Следовательно, достаточно минимизировать затраты на хранение.

Для напряженных планов размеры поставок однозначно определяются с помощью интервалов между поставками:

$$Q_{i-1} = \mu\left(t_i - t_{i-1}\right) \; i = 1, 2, ..., n(T) - 1, \; Q_{n(T)-1} = \mu\left(T - t_{n(T)-1}\right).$$

Действительно, очередная поставка величиной Q_{i-1} совпадает с размером запаса на складе в момент t_{i-1}, расходуется с интенсивностью μ единиц товара в одну единицу времени и полностью исчерпывается к моменту t_i прихода следующей поставки.

Для напряженного плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{Q_{i-1}\left(t_i - t_{i-1}\right)}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{\mu\left(t_i - t_{i-1}\right)^2}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{\mu\Delta_i^2}{2} = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)} \Delta_i^2,$$

где $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n(T)$, $t_{n(T)} = T$.

Ясно, что $\Delta_i, i = 1, 2, ..., n(T)$ — произвольные неотрицательные числа, в сумме составляющие T. Следовательно, для минимизации издержек среди напряженных планов с фиксированным числом поставок достаточно решить задачу оптимизации

$$\begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ... + \Delta_n^2 \to \min, \\ \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n = T, \\ \Delta_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

где $n = n(T)$.

Полученная задача оптимизации формально никак не связана с логистикой, она чисто математическая. Для ее решения целесообразно ввести новые переменные $\alpha_i = \Delta_i - \frac{T}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta_i-\frac{T}{n}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\right)-n\frac{T}{n}=T-T=0\,.$$

Поскольку $\Delta_i=\frac{T}{n}+\alpha_i$ то $\Delta_i^2=\frac{T^2}{n^2}+2\frac{T}{n}\alpha_i+\alpha_i^2$, следовательно, с учетом предыдущего равенства имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=n\frac{T^2}{n^2}+2\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\frac{T^2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\,.$$

Сумма квадратов всегда неотрицательна. Она достигает минимума, равного 0, когда все переменные равны 0, т. е. при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$. Тогда

$$\Delta_i=\frac{T}{n},\ i=1,2,...,n.$$

При этих значениях Δ_i выполнены все ограничения оптимизационной задачи. Итак, утверждение 2 доказано.

Для плана с равными интервалами между поставками все партии товара имеют одинаковый объем. Для такого плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt=\frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)}\Delta_i^2=\frac{\mu s T^2}{n(T)}\,.$$

Средние издержки (на единицу времени) таковы:

$$f(T;y)=\frac{1}{T}\left\{gn(T)+\frac{\mu s T^2}{2n(T)}\right\}=g\frac{n(T)}{T}+\mu s\frac{T}{2n(T)}\,.$$

Итак, минимизация средних издержек — это задача дискретной оптимизации. На третьем этапе построения оптимального плана необходимо найти натуральное число $n(T)$ — самое выгодное число поставок.

Поскольку к моменту T запас товара должен быть израсходован, то общий объем поставок за время T должен совпадать с общим объемом спроса, следовательно, равняться μT. Справедливо балансовое соотношение (аналог закона Ломоносова-Лавуазье сохранения массы при химических реакциях):

$$Qn(T)=\mu T\,.$$

Из балансового соотношения следует, что

$$\frac{n(T)}{T}=\frac{\mu}{Q}\,.$$

Средние издержки (на единицу времени) можно выразить как функцию размера партии Q:

$$f(T;y)=g\frac{n(T)}{T}+\mu s\frac{T}{2n(T)}=f_1(Q)=\frac{\mu g}{Q}+\frac{sQ}{2} \tag{6.1}$$

Задача состоит в минимизации $f_1(Q)$ по Q. При этом возможная величина поставки принимает дискретные значения, $Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n} . n = 1, 2, ... \right\}$.

Изучим функцию $f_1(Q)$, определенную при Q>0. При приближении к 0 она ведет себя как гипербола, при росте аргумента — как линейная функция. Производная имеет вид

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2} .$$

Производная монотонно возрастает, поэтому рассматриваемая функция имеет единственный минимум в точке, в которой производная равна 0, т. е. при

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}} . \qquad (4.2)$$

Получена знаменитая «формула квадратного корня».

В литературе иногда без всяких комментариев рекомендуют использовать напряженный план, в котором размеры всех поставляемых партий равны Q_0. К сожалению, получаемый таким путем план *почти всегда не является оптимальным*, т. е. популярная рекомендация неверна или не вполне корректна. Дело в том, что почти всегда

$$Q_0 \notin \left\{ \frac{\mu T}{n}, n = 1, 2, ... \right\}.$$

Всегда можно указать неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0 \le \frac{\mu T}{n} = Q_2 . \qquad (4.3)$$

Утверждение 3. Решением задачи оптимизации

$$f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2} \to \min,$$

$$Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}, n = 1, 2, ... \right\}$$

является либо Q_1, либо Q_2.

Действительно, из всех $Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}, n = 1, 2, ... \right\}$ часть лежит правее Q_0, из них наименьшим является Q_2, а часть лежит левее Q_0, из них наибольшим является Q_1. Для построения оптимального плана обратим внимание на то, что производная функции $f_1(Q)$ отрицательна левее Q_0 и положительна правее Q_0, следовательно, функция средних издержек $f_1(Q)$ убывает левее Q_0 и возрастает правее Q_0. Значит, минимум по $Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}, n = 1, 2, ... \right\} \cap (Q : Q \ge Q_0)$

достигается при $Q = Q_2$, а минимум по $Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}, n = 1, 2, ... \right\} \cap (Q : Q < Q_0)$ — при $Q = Q_1$

Последнее утверждение эквивалентно заключению утверждения 3.

Итак, алгоритм построения оптимального плана таков.

1. Найти Q_0 по формуле квадратного корня (4.2).
2. Найти n из условия (4.3).
3. Рассчитать $f_1(Q)$ по формуле (4.1) для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, где Q_1 и Q_2 определены в (6.3).
4. Наименьшее из двух чисел $f_1(Q_1)$ и $f_1(Q_2)$ — искомый минимум, а то из чисел Q_1 и Q_2, на котором достигается минимум, — решением задачи оптимизации. Обозначим его Q_{opt}.

Итак, оптимальный план поставки — это напряженный план, в котором объемы всех поставок равны Q_{opt}.

Замечание. Если $f_1(Q_1) = f_1(Q_2)$, то решение задачи оптимизации состоит из двух точек Q_1 и Q_2. В этом частном случае существует два оптимальных плана.

Пример 1. На складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. За 1 день со склада извлекается 5 т продукции. Плата за хранение 1 т продукции в день — 50 руб. Плата за доставку одной партии — 980 руб. Горизонт планирования — 10 дней. Найти оптимальный план поставок.

В рассматриваемом случае μ =5 (т/день), s=50 (руб./т·день), g=980 (руб./партия), T = 10 (дней). По формуле (4.2) рассчитываем

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 980}{50}} = \sqrt{196} = 14 .$$

Множество допустимых значений для Q имеет вид

$$\left\{ \frac{\mu T}{n}, n = 1, 2, ... \right\} = \left\{ 50; \frac{50}{2}; \frac{50}{3}; \frac{50}{4}; ... \right\} = \{50; 25; 16,67; 12,5; ...\}$$

Следовательно, Q_1 = 12,5 и Q_2 = 16,67. Первое значение определяет напряженный план с четырьмя одинаковыми зубцами, а второе — с тремя. Поскольку

$$f_1(Q) = \frac{5 \cdot 980}{Q} + \frac{50Q}{2} = \frac{4900}{Q} + 25Q ,$$

то

$$f_1(Q_1) = f_1(12,5) = \frac{4900}{12,5} + 25 \cdot 12,5 = 392 + 312,5 = 704,5$$

и

$$f_1(Q_2) = f_1\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{4900 \cdot 3}{50} + 25 \cdot \frac{50}{3} = 294 + 416,67 = 710,67 .$$

Поскольку $f_1(Q_1) < f_1(Q_2)$, то $Q_{opt} = Q_1$ = 12,5. Итак, оптимальным является напряженный план с четырьмя зубцами.

Как уже отмечалось, часто рекомендуют применять план поставок с $Q=Q_0$. Каков при этом проигрыш по сравнению с оптимальным планом?

Для плана с $Q = Q_0$ интервал между поставками составляет $\frac{Q_0}{\mu} = \frac{14}{5} = 2{,}8$ дня. Следовательно, партии придут в моменты $t_0 = 0$; $t_1 = 2{,}8$; $t_2 = 5{,}6$; $t_3 = 8{,}4$. Следующая партия должна была бы прийти уже за пределами горизонта планирования $T=10$, в момент $t_4 = 11{,}2$. Таким образом, график уровня запаса на складе в пределах горизонта планирования состоит из трех полных зубцов и одного неполного. К моменту $T=10$ пройдет 10 — 8,4 = 1,6 дня с момента последней поставки, значит, со склада будет извлечено $5 \cdot 1{,}6 = 8$ т продукции и останется 14 — 8 = 6 т. План с $Q = Q_0$ не является напряженным, а потому не является оптимальным для горизонта планирования $T=10$.

Подсчитаем общие издержки в плане с $Q = Q_0$. Площадь под графиком уровня запаса на складе равна сумме площадей трех треугольников и трапеции. Площадь треугольника равна $\frac{14 \cdot 2{,}8}{2} = 19{,}6$ трех треугольников — 58,8. Основания трапеции параллельны оси ординат и равны значениям уровня запаса в моменты времени $t_3 = 8{,}4$ и $T = 10$, т. е. величинам 14 и 6 соответственно. Высота трапеции лежит на оси абсцисс и равна 10 — 8,4 = 1,6, а потому площадь трапеции есть $\frac{(14+6) \cdot 1{,}6}{2} = 16$. Следовательно, площадь под графиком равна 58,8 + 16 = 74,8, а плата за хранение составляет $50 \cdot 74{,}8 = 3740$ руб.

За 10 дней доставлены 4 партии товара (в моменты $t_0 = 0$; $t_1 = 2{,}8$; $t_2 = 5{,}6$; $t_3 = 8{,}4$), следовательно, затраты на доставку равны $4 \cdot 980 = 3920$ руб. Общие издержки за 10 дней составляют 3740+3920 = 7660 руб., а средние издержки — 766 руб. Они больше средних издержек в оптимальном плане в 766/704,5 = 1,087 раза, т. е. на 8,7%.

Отметим, что

$$f_1(Q_0) = \frac{4900}{Q_0} + 25Q_0 = \frac{4900}{14} + 25 \cdot 14 = 350 + 350 = 700,$$

т. е. меньше, чем в оптимальном плане. Таким образом, из-за дискретности множества допустимых значений средние издержки возросли на 4,5 руб., т. е. на 0,64%. При этом оптимальный размер партии (12,5 т) отличается от $Q_0 = 14$ т на 1,5 т, т. е. $Q_{opt} / Q_0 = 0{,}89$ — различие на 11%. Достаточно большое различие объемов поставок привело к пренебрежимо малому изменению функции $f_1(Q)$. Это объясняется тем, что в точке Q_0 функция $f_1(Q)$ достигает минимума, а потому ее производная в этой точке равна 0.

Оба слагаемых в $f_1(Q_0)$ равны между собой. Случайно ли это? Покажем, что нет. Действительно,

$$\frac{\mu g}{Q_0} = \frac{\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}; \quad \frac{sQ_0}{2} = \frac{s\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{2} = \sqrt{\frac{\mu g s}{2}}.$$

Таким образом, составляющие средних издержек, порожденные различными причинами, уравниваются между собой.

Средние издержки в плане с $Q = Q_0$ равны $\sqrt{2\mu g s}$. Интервал между поставками при этом равен

$$\frac{Q_0}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{\mu} = \sqrt{\frac{2g}{\mu s}}.$$

Издержки в течение одного интервала между поставками таковы:

$$\sqrt{2\mu g s} \cdot \sqrt{\frac{2g}{\mu s}} = 2g,$$

при этом половина (т. е. g) приходится на оплату доставки партии, а половина — на хранение товара.

Асимптотически оптимальный план. Из проведенных рассуждений ясно, что напряженный план с $Q=Q_0$ является оптимальным тогда и только тогда, когда горизонт планирования Т приходится на начало очередного зубца, т. е. для

$$T = n\frac{Q_0}{\mu} = n\sqrt{\frac{2g}{\mu s}},\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.4}$$

Для всех остальных возможных горизонтов планирования T этот план не является оптимальным. Оптимальным будет напряженный план с другим размером поставки. Для дальнейшего весьма существенно, что при изменении горизонта планирования T от 0 до T_0 оптимальный план меняется на всем интервале $[0; T_0]$.

Как происходит это изменение? При малых горизонтах планирования T делается лишь одна поставка (в момент времени $t = 0$), график уровня запаса на складе состоит из одного зубца. При увеличении T размер зубца плавно увеличивается. В некоторый момент $T(1)$ происходит переход от одного зубца к двум. В этот момент оптимальны сразу два плана поставки — с одним зубцом и с двумя. При переходе к планам с двумя зубцами размер зубца скачком уменьшается. При дальнейшем увеличении горизонта планирования оптимальный план описывается графиком с двумя одинаковыми зубцами, размер которых плавно растет. Далее в момент $T(2)$ становится оптимальным план с тремя зубцами, размер которых в этот момент скачком уменьшается (в компенсацию за увеличение числа скачков). И т. д.

Проблема состоит в том, что в реальной экономической ситуации выбор горизонта планирования T весьма субъективен. Возникает вопрос, какой план разумно использовать, если горизонт планирования не известен заранее. Проблема горизонта планирования возникает не только в логистике. Она является общей для любого перспективного планирования, поэтому весьма важна для стратегического менеджмента (см. [14]). Для решения проблемы горизонта планирования необходимо использование конкретной модели принятия решений, в рассматриваемом случае — классической модели управления запасами.

Ответ можно указать, если горизонт планирования является достаточно большим. Оказывается можно использовать план, в котором все размеры поставок равны Q_0. Для него уровень запаса на складе описывается функцией $y_0(t),\ 0 \le t < +\infty$, состоящей из зубцов высоты Q_0. Предлагается пользоваться планом, являющимся сужением этого плана на интервал [0; T). Другими словами, предлагается на интервале [0; T) использовать начальный отрезок этого плана. Он состоит из некоторого количества треугольных зубцов, а последний участок графика, описываемый трапецией, соответствует тому, что последняя поставка для почти всех горизонтов планирования не будет израсходована до конца. Такой план иногда называют *планом Вильсона* [11].

Ясно, что этот план не будет оптимальным (для всех T, кроме заданных формулой (4.4)). Действительно, план Вильсона можно улучшить, уменьшив объем последней поставки. Однако у него есть то полезное качество, что при изменении горизонта планирования его начальный отрезок не меняется. Действительно, планы поставок для горизонтов планирования T_1 и T_2, определенные с помощью функции $y_0(t),\ 0 \le t < +\infty$, задающей уровень запасов на складе, совпадают на интервале [0; min $\{T_1, T_2\}$).

Определение. Асимптотически оптимальным планом называется план поставок — функция $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ такая, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{f\left(T;\, y_{opt}(T)\right)}{f(T;y)}=1,$$

где $y_{opt}(T)$ — оптимальный план на интервале [0; T).

В соответствии с определениями и обозначениями, введенными в начале раздела, $f\left(T;\, y_{opt}(T)\right)$ — средние издержки за время T для плана $y_{opt}(T)$, определенного на интервале [0; T), а $f(T;y)$ — средние издержки за время T для плана $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$.

Теорема 1. План $y = y_0$ асимптотически оптимальный.

Таким образом, для достаточно больших горизонтов планирования T планы $y_0(t)$, $0 \le t \le T$, все зубцы у которых имеют высоту Q_0, имеют издержки, приближающиеся к минимальным. Следовательно, эти планы Вильсона, являющиеся сужениями одной и той же функции $y:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ на интервалы [0; T) при различных T, можно использовать одновременно при всех достаточно больших T.

Замечание. Согласно [11] решение проблемы горизонта планирования состоит в использовании асимптотически оптимальных планов, которые близки (по издержкам) к оптимальным планам сразу при всех достаточно больших T.

Доказательство. По определению оптимального плана

$$\frac{f\left(T;\, y_{opt}(T)\right)}{f(T;y)}\le 1. \tag{4.5}$$

Найдем нижнюю границу для рассматриваемого отношения. При фиксированном T можно указать неотрицательное целое число n такое, что

$$\frac{nQ_0}{\mu}\le T<\frac{(n+1)Q_0}{\mu}.$$

Так как $Tf(T;\, y_{opt}(T))$ и $\frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu};\, y_{opt}(T)\right)$ — общие издержки на интервалах (0; T) и (0; nQ_0/μ) соответственно при использовании оптимального на интервале времени (0; T) плана, то, очевидно, поскольку второй интервал — часть первого (или совпадает с ним), первые издержки больше вторых, т. е.

$$Tf(T;\, y_{opt}(T)) \geq \frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu};\, y_{opt}(T)\right).$$

Далее, т. к. на интервале (0; nQ_0 / μ), включающем целое число периодов плана y_0, оптимальным является начальный отрезок этого плана $y_0(nQ_0 / \mu)$, то

$$\frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu};\, y_{opt}(T)\right) \geq \frac{nQ_0}{\mu} f\left(\frac{nQ_0}{\mu};\, y_0(T)\right).$$

В правой части последнего неравенства стоит $\frac{nQ_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}$ (здесь использована формула для минимального значения средних издержек $f(T;\, y)$ при T, кратном nQ_0 / μ). Из проведенных рассуждений вытекает, что

$$Tf(T;\, y_{opt}(T)) \geq \frac{nQ_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs}. \qquad (4.6)$$

Для общих издержек на интервалах (0; T) и (0; $(n + 1)Q_0 / \mu$) при использовании плана y_0, очевидно, справедливо следующее неравенство

$$Tf(T;\, y_0(T)) \leq \frac{(n+1)Q_0}{\mu} f\left(\frac{(n+1)Q_0}{\mu};\, y_0(T)\right).$$

Следовательно,

$$Tf(T;\, y_0\,(T)) \leq \frac{(n+1)Q_0}{\mu}\sqrt{2\mu gs} \qquad (4.7)$$

Из неравенств (6.6) и (6.7) вытекает, что

$$\frac{f(T;\, y_{opt}(T))}{f(T;\, y_0)} \geq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{Q_0}{\mu T}.$$

Так как $\frac{Q_0}{\mu T} \to 0$ при $T \to \infty$, то, учитывая неравенство (6.5), из последнего неравенства выводим справедливость заключения теоремы 1. Таким образом, асимптотическая оптимальность плана y_0 доказана.

При небольшом T средние издержки в плане Вильсона могут существенно превышать средние издержки в оптимальном плане. Превышение вызвано скачками функции $f(T;\, y_0(T))$, связанными с переходами через моменты прихода очередных поставок (и увеличением общих издержек скачком на величину платы за доставку партии). Величину превышения средних издержек в плане Вильсона по сравнению с оптимальными планами можно рассчитать.

Пусть горизонт планирования $T = t_k + \varepsilon$, где t_k — момент прихода $(k+1)$-й поставки в плане Вильсона, $\varepsilon > 0$. Тогда, как можно доказать,

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{f(T;\,y_0(T))}{f(T;\,y_{opt}(T))}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{f\left(t_k+\varepsilon;\,y_0\left(t_k+\varepsilon\right)\right)}{f\left(t_k+\varepsilon;\,y_{opt}\left(t_k+\varepsilon\right)\right)}=1+\frac{1}{2k}\,.$$

Таким образом, затраты в плане Вильсона минимальные (относительно оптимального плана) при $T = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, где t_k — моменты прихода поставок. Напомним, что план Вильсона является оптимальным при указанных T. Однако при T, бесконечно близком к t_k, но превосходящем t_k, затраты увеличиваются по сравнению с затратами в оптимальном плане в $\{1+1\ /\ (2k)\}$ раз. При дальнейшем возрастании T отношение издержек (средних или общих) в плане Вильсона к аналогичным издержкам в оптимальном плане постепенно уменьшается, приближаясь к 1 при приближении (снизу) к моменту t_{k+1} прихода следующей поставки. А там — новый скачок, но уже на меньшую величину $\{1+1\ /\ (2k+2)\}$. И т. д.

Сразу после прихода первой поставки отношение затрат составляет 1,5 (превышение на 50%), после прихода второй — 1,25 (превышение на 25%), третьей — 1,167 (превышение на 16,7%), четвертой — 1,125 (превышение на 12,5%), пятой — 1,1 (превышение на 10%), и т. д. Таким образом, при небольших горизонтах планирования T превышение затрат может быть значительным, план Вильсона отнюдь не оптимальный. Но чем больше горизонт планирования, тем отклонение меньше. Уже после сотой поставки оно не превышает 0,5%.

Влияние отклонений от оптимального объема партии. В реальных производственных и управленческих ситуациях часто приходится принимать решения об использовании объемов партии, отличных от оптимальной величины Q_0, рассчитанной по формуле квадратного корня (4.2). Например, при ограниченной емкости склада или для обеспечения полной загрузки транспортных средств большой вместимости. Это возможно также в ситуации, когда величина партии измеряется в целых числах (штучный товар) или даже в десятках, дюжинах, упаковках, ящиках, контейнерах и т. д., а величина Q_0 не удовлетворяет этому требованию и, следовательно, не может быть непосредственно использована в качестве объема поставки.

Поэтому необходимо уметь вычислять возрастание средних издержек при использовании напряженного плана с одинаковыми поставками объема Q, отличного от Q_0, по сравнению со средними издержками в оптимальном плане. Будем сравнивать средние издержки за целое число периодов. Как показано выше, они имеют вид

$$f_1(Q)=\frac{\mu g}{Q}+\frac{sQ}{2}\,,$$

где Q — объем партии. Тогда

$$\frac{f_1(Q)-f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q-Q_0}{Q}\right)\left(\frac{Q-Q_0}{Q}\right). \qquad (4.8)$$

Это тождество нетрудно проверить с помощью простых алгебраических преобразований.

Пример 2. Пусть используется план с $Q = 0{,}9\ Q_0$. Тогда

$$\frac{f_1(Q)-f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}1Q_0}{0{,}9Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}1Q_0}{Q_0}\right)=\frac{0{,}01}{1{,}8}=0{,}0056\,.$$

Таким образом, изменение объема партии на 10% привело к увеличению средних издержек лишь на 0,56%.

Пример 3. Пусть используемое значение объема поставки Q отличается от оптимального не более чем на 30%. На сколько могут возрасти издержки?

Из формулы (4.8) вытекает, что максимальное возрастание издержек будет в случае $Q = 0{,}7 \cdot Q_0$. Тогда

$$\frac{f_1(Q)-f_1(Q_0)}{f_1(Q_0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-0{,}3Q_0}{0{,}7Q_0}\right)\left(\frac{-0{,}3Q_0}{Q_0}\right)=\frac{0{,}09}{1{,}4}=0{,}0643\,.$$

Таким образом, издержки могут возрасти самое большее на 6,43%.

На первый взгляд, представляется удивительным, что сравнительно большое отклонение значения переменной Q от оптимального (на 30%) приводит к столь малому возрастанию значения оптимизируемой функции. Этот факт имеет большое прикладное значение. Из него следует, что область «почти оптимальных» значений параметра весьма обширна, следовательно, из нее можно выбирать для практического использования те или иные значения исходя из иных принципов. Можно, например, минимизировать какую-либо иную целевую функцию, тем самым решая задачу многокритериальной оптимизации. Можно «вписаться» в действующую дискретную систему возможных значений параметров. И т. д.

Важное замечание 1. Обширность области «почти оптимальных» значений параметра — общее свойство оптимальных решений, получаемых путем минимизации гладких функций. Действительно, пусть необходимо минимизировать некоторую функцию $g(x)$, трижды дифференцируемую. Пусть минимум достигается в точке x_0. Справедливо разложение Тейлора-Маклорена

$$g(x)=g(x_0)+\frac{dg(x_0)}{dx}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2g(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2+O\left((x-x_0)^3\right).$$

Однако в x_0 выполнено необходимое условие экстремума (в данном случае — минимума)

$$\frac{dg(x_0)}{dx}=0\,.$$

Следовательно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (по сравнению с $(x-x_0)^2$) справедливо равенство

$$g(x)-g(x_0)=\frac{1}{2}\frac{d^2g(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2\,. \qquad (4.9)$$

Это соотношение показывает, что приращение значений минимизируемой функции — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с приращением независимой переменной. Если

$$x = x_0 + \varepsilon,$$

то

$$g(x) - g(x_0) = C\varepsilon^2,$$

где

$$C = \frac{1}{2}\frac{d^2 g(x_0)}{dx^2}.$$

Вернемся к классической модели управления запасами. Для нее надо рассматривать $f_1(Q)$ в роли $g(x)$. С помощью соотношения (6.9) заключаем, что

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{d^2 f_1(Q_0)}{dQ^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Вычислим вторую производную $f_1(Q)$. Поскольку

$$\frac{df_1(Q)}{d(Q)} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}\right) = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2},$$

то

$$\frac{d^2 f_1(Q)}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\left(-\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2}\right) = \frac{2\mu g}{Q^3}.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{2\mu g}{Q_0} = \frac{2\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}} = \sqrt{2\mu g s} = f_1(Q_0).$$

Следовательно,

$$f_1(Q) - f_1(Q_0) = \frac{1}{2}\frac{f_1(Q_0)}{Q_0^2}(Q - Q_0)^2$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Отличие этой формулы от точной формулы (6.8) состоит только в том, что Q в знаменателе одной из дробей заменено на Q_0.

Устойчивость выводов в математической модели. Вполне ясно, что рассматриваемая классическая модель управления запасами, как и любые иные экономико-математические модели конкретных экономических явлений и процессов, лишь приближение к реальности. Приближение может быть более точным или менее точным, но никогда не может полностью уловить все черты реальности. Поэтому с целью повышения адекватности получаемых на основе экономико-математической модели выводов целесообразно изучить устойчивость этих выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели [13, 11]. Выше изучено изменение средних издержек при малых отклонениях величины поставки.

Предположим теперь, что вместо истинных значений параметров μ, g, s нам известны лишь их приближенные значения $\mu^* = \mu + \Delta\mu$, $g^* = g + \Delta g$, $s^* = s + \Delta s$. Мы применяем план Вильсона, но с искаженным объемом партии

$$Q^* = Q^*\left(\mu^*, g^*, s^*\right) = \sqrt{\frac{2\mu^* g^*}{s^*}}.$$

Это приводит к возрастанию средних издержек. Согласно формулам (4.8)–(4.9) возрастание пропорционально $(\Delta Q)^2$ (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка). Здесь

$$\Delta Q = Q^*\left(\mu^*, g^*, s^*\right) - Q_0\left(\mu, g, s\right).$$

Выделим в ΔQ главный линейный член:

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \mu}\Delta\mu + \frac{\partial Q}{\partial g}\Delta g + \frac{\partial Q}{\partial s}\Delta s = \sqrt{\frac{g}{2\mu s}}\Delta\mu + \sqrt{\frac{\mu}{2gs}}\Delta g - \sqrt{\frac{\mu g}{2s^3}}\Delta s \tag{4.10}$$

(с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Величину $\Delta\mu$ можно определить по фактическим данным о спросе, оценив величину отклонения реального спроса от линейного приближения [11], например, с помощью математического аппарата линейного регрессионного анализа [13]. Для определения значений параметров g и s необходимо проведение специальных трудоемких исследований. К тому же существуют различные методики расчета этих параметров, результаты расчетов по которым не совпадают. Поэтому естественно оценить разумную точность определения g и s по известной точности определения μ. Для этого воспользуемся «принципом уравнивания погрешностей», предложенным в [11].

Важное замечание 2. Принцип уравнивания погрешностей состоит в том, что погрешности различной природы должны вносить примерно одинаковый вклад в общую погрешность математической модели. Так, определение рационального объема выборки в статистике интервальных данных основано на уравнивании влияния метрологической и статистической погрешностей. Согласно подходу [11], выбор числа градаций в социологических анкетах целесообразно проводить на основе уравнивания погрешностей квантования и неопределенности в ответах респондентов. В классической модели управления запасами целесообразно уравнять влияние неточностей в определении параметров на отклонение целевой функции от оптимума.

Выберем Δg и Δs так, чтобы увеличение затрат, вызванное неточностью определения g и s, было таким же, как и вызванное неточностью определения μ. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка это означает, что необходимо уравнять между собой три слагаемых в правой части (4.10). После сокращения общего множителя получаем, что согласно принципу уравнивания погрешностей должно быть справедливо соотношение

$$\frac{|\Delta\mu|}{\mu} = \frac{|\Delta g|}{g} = \frac{|\Delta s|}{s}. \tag{4.11}$$

Таким образом, относительные погрешности определения параметров модели должны совпадать.

В соотношении (4.11) используются истинные значения параметров, которые неизвестны. Поэтому целесообразно вначале вместо параметров использовать их грубые оценки, из (4.11) определить их примерную точность, затем провести исследования, уточняющие значения параметров. Эту процедуру целесообразно повторять до тех пор, пока не произойдет некоторое уравнивание относительных погрешностей определения параметров модели.

Модель с дефицитом. Классическая модель управления запасами может быть обобщена в различных направлениях. Одно из наиболее естественных обобщений — введение в модель возможности дефицита.

В рассматриваемой до сих пор модели предполагалось, что дефицит не допускается, т. е. некоторое количество товара на складе всегда есть. Но, может быть, выгоднее сэкономить на расходах по хранению запаса, допустив небольшой дефицит, — потребность в товаре в некоторые интервалы времени может остаться неудовлетворенной?

Как подсчитать убытки от дефицита, в частности, от потери доверия потребителя? Будем считать, что если нет товара, владеющая складом организация платит штраф — каждый день пропорционально нехватке. По приходе очередной поставки все накопленные требования сразу же удовлетворяются.

Сохраним все предположения и обозначения рассматриваемой до сих пор модели, кроме отсутствия дефицита. Неудовлетворенный спрос будем рассматривать как отрицательный запас. График изменения величины запаса на складе изображен на рис. 4.3.

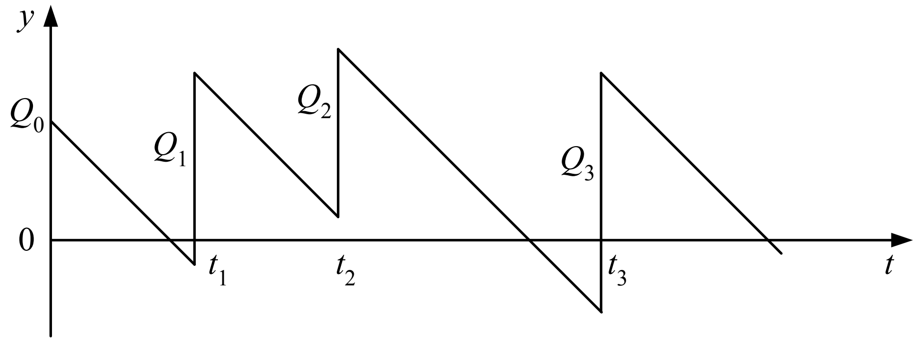

Рис. 4.3. График изменения величины запаса на складе при возможности дефицита

Очевидно, рис. 4.1 и рис. 4.3 отличаются только тем, что на последнем рисунке зубцы графика могут опускаться ниже оси абсцисс, что соответствует сдвигу графика рис. 4.1 как единого целого вниз вдоль оси ординат.

Пусть h — плата за нехватку единицы товара в единицу времени (например, в день). Тогда средние издержки за время T определяются формулой

$$f_1(T, y) = f_1\big(y(t), 0 \le t \le T\big) =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)\chi\big(y(t) \ge 0\big)\,dt + h\int_0^T |y(t)|\chi\big(y(t) < 0\big)\,dt + gn(T) \right\},$$

где $\chi\,(A)$ — индикатор множества A, т. е. $\chi(y(t) \geq 0) = 1$ при $y(t) \geq 0$ и $\chi(y(t) \geq 0)=0$ при $y(t) < 0$, в то время как $\chi(y(t) < 0) = 1$ при $y(t) < 0$ и $\chi(y(t) < 0) = 0$ при $y(t) \geq 0$. Таким образом, площадь под частью графика уровня запаса, лежащей выше оси абсцисс, берется с множителем s, а площадь между осью абсцисс и частью графика $y(t)$, соответствующей отрицательным значениям запаса, берется с заметно большим по величине множителем h.

Для модели с дефицитом оптимальный план находится почти по той же схеме, что и для модели без дефицита. Сначала фиксируем моменты поставок и находим при этом условии оптимальные размеры поставок. Фактически речь идет о выборе уровня запаса Y в момент прихода очередной поставки (рис. 4.4).

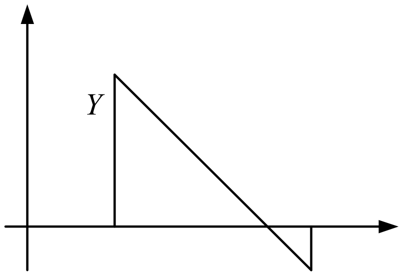

Рис. 4.4. Первый шаг построения оптимального плана в модели с дефицитом

Увеличивая или уменьшая Y, можно увеличивать или уменьшать площадь треугольника над осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом s) и соответственно уменьшать или увеличивать площадь треугольника под осью абсцисс (учитываемую с коэффициентом h), добиваясь минимизации взвешенной суммы этих площадей. Все элементы прямоугольных треугольников на рис. 4.4 выражаются через Y, заданный интервал времени между поставками и параметры модели. Минимизация соответствующего квадратного трехчлена дает оптимальное значение

$$Y = \frac{h}{s+h}\mu\Delta\,.$$

При этом минимальная сумма затрат на хранение и издержки, вызванные дефицитом, равна

$$\frac{\Delta^2\mu}{2}\frac{sh}{s+h}\,.$$

Второй шаг нахождения оптимального плана в модели с дефицитом полностью совпадает с аналогичным рассуждением в исходной модели. Фиксируется число поставок, и с помощью варьирования размеров интервалов между поставками минимизируется целевой функционал. Поскольку сумма квадратов некоторого числа переменных при заданной их сумме достигает минимума, когда все эти переменные равны между собой, то оптимальным планом является план, у которого все зубцы одинаковы, т. е. уровень запаса в момент прихода очередной поставки — всегда один и тот же. При этом все объемы поставок, за исключением объема начальной поставки (в нулевой момент времени), равны между собой:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = ..., Q_0 = \frac{h}{s+h}Q. \tag{4.12}$$

На третьем этапе среди указанного однопараметрического дискретного множества планов находим оптимальный план. Как и для модели без дефицита, в качестве ориентира используется план с размером поставки, определяемой по формуле квадратного корня,

$$Q_0(\mu, g, s, h) = \sqrt{\frac{2\mu g(s+h)}{sh}}\ .$$

Для горизонтов планирования T, кратных $\frac{Q_0(\mu, g, s, h)}{\mu}$, оптимальным является план типа (4.12) с $Q = Q_0(\mu, g, s, h)$. Для всех остальных горизонтов планирования, как и в случае модели без дефицита, необходимо найти неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0(\mu, g, s, h) < \frac{\mu T}{n} = Q_2\,,$$

а затем, сравнив издержки для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, объявить оптимальным то из этих двух значений, для которого издержки меньше.

Модель без дефицита — предельный случай для модели с дефицитом при безграничном возрастании платы за дефицит. В частности,

$$\lim_{h\to\infty} Q_0(\mu, g, s, h) = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}\ .$$

Как и в случае модели без дефицита, план с объемом поставки, определяемой по формуле квадратного корня, $Q = Q_0(\mu, g, s, h)$, является асимптотически оптимальным.

Система моделей на основе модели Вильсона. Классическая модель теории управления запасами, называемая также моделью Вильсона, допускает различные обобщения.

Одно из таких обобщений — модель с конечной скоростью поставки υ, т. е. модель, в которой за время Δt поставляется продукция объемом $\upsilon\Delta t$ (при наличии в то же время постоянного спроса с интенсивностью μ, причем считается, что $\upsilon>\mu$). Таким образом, в этой модели поставка происходит не мгновенно, а в течение некоторого интервала времени, причем объем поставляемой продукции линейно зависит от времени. Такие поставки будем называть линейными с интенсивностью υ.

Другое обобщение классической модели связано с обобщением функции от объема запаса, задающей плату за хранение. В исходной модели считалось, что расходы за хранение пропорциональны объему продукции на складе. Естественно считать, что эти расходы должны содержать постоянный член a, не зависящий от объема продукции на складе (расходы на содержание самого склада, оплату работников и т. д.). Однако оптимальный план при таком обобщении не изменится. Действительно, в формуле для издержек добавится постоянный член a, и положение минимума не изменится при его добавлении.

Однако в модели с дефицитом ситуация иная. Затраты на хранение возникают только при наличии товара на складе, и издержки этого вида вполне естественно разделить на постоянные и переменные (пропорциональные объему запаса на складе).

Аналогично издержки, вызванные дефицитом, вполне естественно разделить на постоянные (вызванные самим фактом дефицита) и переменные (пропорциональные величине дефицита).

В классической модели плата за доставку партии не зависит от объема партии. Т. е. здесь используются только постоянные издержки. Представляется вполне естественным ввести линейный член, соответствующий возрастанию платы за доставку в зависимости от величины партии (переменные издержки). (Ниже будет показано, что добавление этого члена не влияет на решение задачи оптимизации и вид оптимального плана.) Дальнейшее обобщение — введение скидок в зависимости от величины партии. Это приводит к выражению платы за доставку в виде квадратного трехчлена от объема партии.

Можно рассматривать одновременно несколько обобщений. В результате получаем систему моделей на основе классической модели управления запасами, состоящую из 36 моделей [12]. Каждая из них может быть описана набором четырех чисел ($a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$). Каждое из этих чисел соответствует одному из рассмотренных выше видов обобщений исходной модели.

При этом $a(1) = 0$, если поставки мгновенные, и $a(1) = 1$, если поставки являются линейными с интенсивностью υ, причем $\upsilon>\mu$.

Если плата за хранение продукции объемом y в течение единицы времени равна sy, то $a(2) = 0$. Если же учтены постоянные (при наличии товара на складе) издержки, т. е. указанная плата равна $sy+a$, $a>0$, то $a(2) = 1$.

Если плата за нехватку продукции объемом y в течение единицы времени бесконечна (т. е. дефицит не допускается), то $a(3) = 0$. Если эта плата равна hy (рассмотренная выше модель с дефицитом), то $a(3)=1$. Если же вводятся также постоянные издержки (плата за само наличие дефицита), т. е. плата за нехватку продукции объемом y в течение единицы времени равна $hy + b$, $b > 0$, то $a(3) = 2$.

Наконец, $a(4) = 0$, если плата за доставку партии продукции объемом Q равна g. Если учитываются переменные издержки, т. е. эта плата равна $g + g_1Q$, то $a(4) = 1$. Если же в модели учитываются скидки на объем партии, т.е. если плата за доставку партии продукции объемом Q равна $g + g_1Q + g_2Q^2$, то $a(4) = 2$.

Для $a(1)$ имеется два возможных значения, для $a(2)$ — тоже два, для $a(3)$ — три возможных значения, для $a(4)$ — тоже три. Всего имеется $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ возможных комбинаций, т. е. 36 возможных моделей. Классическая модель управления запасами описывается набором (0, 0, 0, 0), а модель с дефицитом — набором (0, 0, 1, 0).

Рассмотрим наиболее обобщенную модель рассматриваемой системы. Она описывается набором (1, 1, 2, 2). Можно показать, что для нее справедливы основные утверждения, касающиеся классической модели и модели с дефицитом. Однако «формула квадратного корня» имеет более сложный вид, а именно,

$$Q_0(\mu,\nu,s,a,h,b,g,g_1,g_2)=\sqrt{\frac{\mu g-\dfrac{(a-b)^2}{2(s+h)}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\mu}{\nu}}\right)}{\dfrac{sh}{2(s+h)}\left(1-\dfrac{\mu}{\nu}\right)+\mu g_2}}\,.$$

В частности, план с $Q=Q_0(\mu,\nu,s,a,h,b,g,g_1,g_2)$ асимптотически оптимальный.

Формула для $Q_0(\mu,\nu,s,a,h,b,g,g_1,g_2)$ позволяет обнаружить ряд любопытных эффектов. Так, в ней не участвует параметр g_1. Другими словами, при любом изменении этого параметра оптимальный объем поставки не меняется. Если запас пополняется весьма быстро по сравнению со спросом, т. е. $\upsilon >> \mu$, то соответствующий множитель в «формуле квадратного корня» исчезает, и для моделей с $a(1)=0$ получаем более простую формулу

$$Q_0(\mu,+\infty,s,a,h,b,g,g_1,g_2)=\sqrt{\frac{\mu g-\dfrac{(a-b)^2}{2(s+h)}}{\dfrac{sh}{2(s+h)}+\mu g_2}}\,.$$

Дальнейшее упрощение получаем при $a=b$. Это равенство означает, что постоянные (в другой терминологии — фиксированные) платежи за хранение и в связи с дефицитом совпадают, например, равны 0. Если последнее утверждение справедливо, то

$$Q_0(\mu,+\infty,s,0,h,0,g,g_1,g_2)=\sqrt{\frac{\mu g}{\dfrac{sh}{2(s+h)}+\mu g_2}}\,.$$

Предположим теперь, что при доставке партии отсутствуют скидки (или надбавки) за размер партии. Тогда «формула квадратного корня» упрощается дальше и приобретает вид

$$Q_0(\mu,+\infty,s,0,h,0,g,g_1,0)=\sqrt{\frac{\mu g}{\dfrac{sh}{2(s+h)}}}=\sqrt{\frac{2\mu g(s+h)}{sh}}\,.$$

Эта формула уже получена выше при рассмотрении модели с дефицитом. При безграничном возрастании h получаем формулу Вильсона для классической модели управления запасами:

$$Q_0(\mu,+\infty,s,0,+\infty,0,g,g_1,0)=\sqrt{\frac{2\mu g}{\dfrac{s}{2(s+h)}}}\,.$$

Новое в последних двух формулах — наличие в левой части параметра g_1, не участвующего в формировании объема партии.

Важное замечание 3. Модели конкретных экономических (и не только) процессов и явлений обычно не встречаются и не изучаются поодиночке. Обычно имеется совокупность моделей, объединенных в систему, переходящих друг в друга при тех или иных предельных переходах. Часто более простые модели используются для расчетов, более сложные применяются для изучения точности, достигаемой с помощью более простых, согласно подходу, развитому в [13, 11].

О практическом применении классической модели управления запасами. Для отработки методики практического использования классической модели управления запасами проведен эксперимент на снабженческо-сбытовой базе, а именно на Реутовской химбазе Московской области. Собраны и обработаны данные по одному из товаров, распространяемых этой организацией в большом объеме, — по кальцинированной соде. В качестве исходной информации о спросе использовались данные об ежедневном отпуске кальцинированной соды потребителям, зафиксированные на карточках складского учета. Рассчитана величина затрат на хранение как соответствующая доля общей суммы издержек по содержанию базы, а также расходы на доставку новых партий. Для определения расходов на хранение запасов использованы данные о заработной плате складского персонала (включая основную и дополнительную заработную плату, начисления на зарплату), расходах на содержание охраны, эксплуатацию складских зданий и сооружений, расходах по текущему ремонту, по таре, на приемку, хранение, упаковку и реализацию товаров, о величине амортизационных отчислений и др. Для расчета расходов на доставку новых партий товара использованы данные о расходах по завозу, о плате за пользование вагонами и контейнерами сверх установленных норм, расходах на содержание и эксплуатацию подъемно-транспортных механизмов, о заработной плате работников, занятых в процессе доставки товара, канцелярских, почтовых и телеграфных расходах и др.

Полезным оказалось вытекающее из «принципа уравнивания погрешностей» соотношение (4.11). Интенсивность спроса μ и погрешность определения этого параметра найдены методом наименьших квадратов. Это дало возможность установить величину относительной точности определения параметров модели, вытекающих из величин погрешностей исходных данных для спроса. Параметры классической модели управления запасами g и s оценивались двумя способами — по методике Всесоюзного института материально-технического снабжения и по методике Центрального экономико-математического института АН СССР. Для каждой из методик с помощью соотношения (6.11) были найдены абсолютные погрешности определения параметров g и s. Оказалось, что для каждой из методик интервалы ($s — \Delta s$, $s + \Delta s$) и ($g — \Delta g$, $g + \Delta g$) таковы, что числа, рассчитанные по альтернативной методике, попадают внутрь этих интервалов. Это означает, что для определения параметров g и s можно пользоваться любой из указанных методик (в пределах точности расчетов, заданной наблюдаемыми колебаниями спроса).

Вызванное отклонениями параметров модели в допустимых пределах максимальное относительное увеличение суммарных затрат на доставку и хранение продукции не превосходило 26% (колебания по кварталам от 22,5 до 25,95%). Фактические издержки почти в 3 раза превышали оптимальные (в зависимости от квартала фактические издержки составляли от 260 до 349% от оптимального уровня). Следовательно, внедрение модели Вильсона в практику управления запасами на Реутовской химбазе дает возможность снизить издержки, связанные с доставкой и хранением кальцинированной соды, не менее чем в 2 раза [11, 4].

Таким образом, несмотря на то, что параметры модели определены неточно и отклонения значений параметров (от тех значений, по которым рассчитывается оптимальный план поставок) приводят к некоторому увеличению затрат по сравнению с затратами в оптимальном плане, использование рассматриваемой модели для реального управления запасами конкретной продукции может дать значительный экономический эффект. Аналогичным является положение со многими другими моделями управления запасами. Это утверждение подтверждает и зарубежный опыт [11].

Двухуровневая модель управления запасами. Создание любой автоматизированной системы управления материально-техническим снабжением (в другой терминологии — процессами логистики), базирующейся на комплексе экономико-математических моделей, должно включать в себя разработку (в качестве блоков) моделей деятельности отдельных баз (складов). Поэтому большое внимание уделяется проблеме построения оптимальной политики управления запасами на базе (складе). Экономико-математическую теорию удается развивать в основном для однопродуктовых моделей.

Двухуровневая модель управления запасами — это однопродуктовая модель работы склада, в которой заявки потребителей удовлетворяются мгновенно. При отсутствии продукта заявки учитываются. Как только запас на складе опускается до уровня $R < 0$, мгновенно поступает партия товара величиной Q и запас на складе оказывается равным $R+Q>0$. Как и в рассмотренном выше варианте классической модели Вильсона с дефицитом, издержки складываются из издержек по хранению, издержек от дефицита и издержек по доставке. Средние издержки за время T имеют вид

$$f_1(T, y) = f_1\left(y(t), 0 \le t \le T\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ s\int_0^T y(t)\chi\left(y(t) \ge 0\right)dt + h\int_0^T \left|y(t)\right|\chi\left(y(t) < 0\right)dt + gn(T)\right\},$$

где $y(t)$ — уровень запаса на складе, $\chi(A)$ — индикатор множества A, т. е. $\chi(y(t) \geq 0) = 1$ при $y(t) \geq 0$ и $\chi(y(t) \geq 0)=0$ при $y(t) < 0$, в то время как $\chi(у(t) < 0) = 1$ при $y(t)<0$ и $\chi(y(t) < 0) = 0$ при $y(t) \geq 0$, параметры модели s, h, g имеют тот же смысл, что и выше. Оптимизация состоит в определении значений нижнего уровня R и верхнего уровня $R + Q$, минимизирующих средние издержки.

В 1950-х гг. американский исследователь К. Эрроу (в будущем — нобелевский лауреат по экономике) с сотрудниками показал, что в ряде случаев оптимальная политика управления запасами — это политика, основанная на двухуровневой модели [11]. Этот принципиально важный теоретический результат стимулировал развитие исследований свойств двухуровневой модели. Однако окончательная теория была построена только в конце 1970-х годов [11].

Важными являются характеристики потока заявок. Пусть $\tau(T)$ — число заявок за время T. Эта величина предполагается случайной. С прикладной точки зрения вполне естественно предположить, что математическое ожидание $M\tau(T)$ конечно. Накопленный спрос за время T имеет вид

$$X(T) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{\tau(T)},$$

где X_j — величина j-й заявки. Предполагается, что X_1, X_2, … , X_n, … — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием MX_1. Таким образом, накопленный спрос за время T является суммой случайного числа случайных слагаемых. Накопленный спрос определяет уровень запаса на складе, поэтому математический аппарат изучения двухуровневой модели — это предельная теория сумм случайного числа случайных слагаемых.

При некоторых условиях регулярности (выполняющихся для реальных систем управления запасами) в [11] найдены оптимальные (для горизонта планирования T) значения нижнего и верхнего уровней:

$$R_0(T) = -\sqrt{\frac{2gsM\tau(T)MX_1}{Th(s+h)}},$$

$$Q_0(T) = \sqrt{\frac{2g(s+h)M\tau(T)MX_1}{Tsh}}.$$

Часто можно принять, что число поступающих заявок обладает некоторой равномерностью. Например, вполне естественно принять, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{M\tau(T)}{T} = \lambda$$

при некотором λ. Здесь λ — параметр, описывающий предельную интенсивность спроса. Тогда асимптотически оптимальные уровни имеют вид:

$$R_0 = -\sqrt{\frac{2gs\lambda MX_1}{h(s+h)}},$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2g(s+h)\lambda MX_1}{sh}}.$$

Отметим, что асимптотическое распределение уровня запаса на складе — равномерное на отрезке $[R, R + Q]$.

Модель планирования размеров поставок на базу (склад). В двухуровневой модели накопленный спрос в любой момент времени — случайная величина. Это не всегда соответствует экономической реальности. Достаточно часто в соответствии с заключенными договорами размеры поставок на базу и объемы запрашиваемой потребителями продукции определены до начала года (с разбивкой по кварталам или по месяцам) и затем не меняются. Однако поставщик имеет право отгружать продукцию, а потребители — забирать ее в течение всего квартала (или месяца).

Опишем соответствующую однопродуктовую модель [10]. Пусть интервал планирования разбит на m периодов, не обязательно одинаковых по продолжительности. В течение каждого периода приходит на базу одна поставка. В i-й период ее величина равна H_i, а момент поступления — случайная величина $\tau(i)$ с функцией распределения $G(i,t)$, $0 \le t \le 1$, где t — отношение времени, прошедшего с начала i-го периода, к продолжительности его, $i = 1, 2, …, m$.

В i-й период имеется $n(i)$ потребителей, получающих с базы строго определенное количество продукта, $c(1, i)$, $c(2, i)$, …, $c(n(i), i)$ соответственно. Моменты поступления требований от потребителей — случайные величины $\delta(i, j)$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, с функциями распределения $F(i, j, t)$, $0 \leq t \leq 1$, где t — отношение времени, прошедшего после начала соответствующего периода, к продолжительности этого периода. Если в момент прихода требования на базе имеется достаточное количество продукта, то он отпускается мгновенно. Если продукта нет, потребителю придется ждать очередной поставки. Если продукта недостаточно, то весь оставшийся товар отпускается сейчас же, а оставшуюся часть приходится ждать.

В течение i-го периода, $i = 1, 2, \ldots, m$, все моменты поступления товара и требований $\tau(i)$, $\delta(i, j)$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, предполагаются независимыми в совокупности. Потери, как обычно, складываются из издержек по хранению и от дефицита (расходы на доставку партий заданы заранее, т. е. постоянны, а потому их можно не включать в минимизируемый функционал). Издержки по хранению предполагаются пропорциональными времени хранения и величине запаса с коэффициентами пропорциональности $s(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Издержки от дефицита складываются из потерь у каждого из потребителей; они пропорциональны величине и длительности дефицита с коэффициентами пропорциональности $h(i, j)$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть $x(0)$ — начальный запас, $x(i)$ — количество продукта на базе в конце i-го периода, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $S(i) = \{s(i), c(j,i), h(i,j), G(i,t), F(i,j,t), 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, n(i)\}$ — исходные данные модели в i-й период. Как легко видеть, математическое ожидание издержек за i-й период зависит только от $x(i-1)$, $x(i)$ и $S(i)$. Для краткости обозначим его через $f(x(i-1), x(i), S(i))$. Тогда математическое ожидание издержек за m периодов равно

$$Z(m) = f(x(0), x(1), S(1)) + f(x(1), x(2), S(2)) + \ldots$$

$$+ f(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) + f(x(m-1), x(m), S(m)).$$

Необходимо минимизировать $Z(m) = Z(x(0), x(1), \ldots, x(i), \ldots, x(m))$ по совокупности переменных. Таким образом, необходимо найти оптимальные значения уровней запаса на складе в начале и в конце периодов. Это эквивалентно определению оптимальных размеров поставок по периодам и начального запаса. Ограничения рассматриваемой оптимизационной задачи выписаны в [11, 10].

Вначале была сделана попытка рассматривать задачу минимизации $Z(m)$ как задачу динамического программирования и решать ее типовыми методами. Однако вычислительных мощностей оказалось недостаточно для выполнения расчетов. Тогда нам удалось показать, что функция $(m+1)$-го переменного $Z(m)$ в действительности является суммой $(m + 1)$ функции одного переменного.

Действительно,

$$f(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) = f_1(x(i\text{-}1), x(i), S(i)) + f_2(x(i\text{-}1), x(i), S(i)),$$

где $f_1(x(i\text{-}1), x(i), S(i))$ — математическое ожидание затрат, произведенных до прихода очередной поставки, $f_2(x(i-1), x(i), S(i))$ — математическое ожидание затрат после поступления поставки.

Ясно, что $f_1(x(i-1), x(i), S(i))$ определяется запасом на начало периода и спросом до прихода поставки, но не зависит от запаса на конец периода, т. е. от $x(i)$. Таким образом, можно записать, что

$$f_1(x(i-1), x(i), S(i)) = f_1(x(I-1), S(i)).$$

Пусть H_i — объем поставки на склад в i-й период. Сразу же после прихода поставки запас y на складе равен

$$y(\tau(i)) = x(i-1) + H_i - \xi(\tau(i)) = x(i) + \sum_{1\le j\le n(i)} c(j,i) \; - \xi(\tau(i)),$$

где $\xi(\tau(i))$ — накопленный с начала периода спрос. Поскольку $\xi(\tau(i))$ не зависит от $x(i\text{-}1)$, то и $f_2(x(i-1), x(i), S(i))$ не зависит от $x(i-1)$. Итак,

$$f_2(x(i-1), x(i), S(i)) = f_2(x(i), S(i)).$$

Следовательно, минимизируемая функция имеет вид

$$Z(m) = f_1(x(0), S(1)) + \sum_{1\le i\le m-1} \{f_2(x(i), S(i)) + f_1(x(i), S(i+1))\} +$$

$$+ f_2(x(m), S(m)).$$

При этом ограничения наложены на каждую переменную $x(i)$ по отдельности [11, 10]. Ясно, что задача минимизации $Z(m)$ распадается на m+1 задачу минимизации функций одной переменной:

$$f_1(x(0), S(1)) \to \min,$$

$$f_2(x(i), S(i)) + f_1(x(i), S(i+1)) \to \min, \qquad (4.13)$$

$$i = 1, 2, ..., m-1,$$

$$f_2(x(m), S(m)) \to \min$$

(ограничения не указаны). Следовательно, $x(k)$ зависит только от исходных данных смежных периодов $S(k)$ и $S(k+1)$ и остается неизменным при любом изменении $S(i)$, $i \ne k$, $i \ne k+1$. Из указанного разложения задачи многомерной оптимизации на ряд задач одномерной оптимизации вытекает также, что при планировании на $m(1)$ и $m(2)$ периодов совпадают оптимальные значения начального запаса и поставок за первые $\min\{m(1), m(2)\}$ — 1 периодов. В частном случае стационарного режима $S(i)= S$, $i= 1, 2, \ldots, m$, оптимальный план имеет вид $\{a, b, b, ..., b, ..., b, c\}$, где a — решение первой из указанных в (4.13) задач, b — решение второй задачи и c — третьей.

Переход к задачам (4.13) не только позволяет решить исходную задачу минимизации (напомним, что для минимизации задачи в исходной форме не хватало вычислительных мощностей), но также получить весьма важный для экономической интерпретации вывод о независимости оптимальных значений поставок и начального запаса от горизонта планирования m.

Важное замечание 4. Рассмотренная модель дает хороший пример пользы математического анализа оптимизационной задачи принятия решений. Такой анализ позволяет решать задачу не стандартными методами, требующими больших вычислительных ресурсов, а с помощью специально разработанных алгоритмов, учитывающих специфику задачи и позволяющих на много порядков сократить вычисления. Плата за экономию вычислительных ресурсов — необходимость квалифицированного труда специалистов по экономико-математическим методам и прикладной математике.

В настоящее время логистика — одна из экономических дисциплин, весьма развитая в теоретическом и практическом отношении. В ней рассматривается масса конкретных моделей управления запасами. Из перспективных направлений назовем использование случайных множеств в моделях логистики. Моделирование с целью нахождения оптимальных решений продемонстрировано выше на примерах системы моделей, исходящих из классической модели Вильсона, двухуровневой модели, модели оптимизации объемов поставок на базу (склад).

4.2. Теоретические положения создания организационно-экономической системы управления запасами

Анализ структуры производственно-сбытовой системы. Под *производственно-сбытовой системой* (ПСС) понимается взаимосвязанная совокупность функциональных подразделений предприятия, взаимодействующая с элементами внешней среды и направленная на достижение определенных целей, связанных с производством и распределением продукции. Принципиальная схема функционирования ПСС представлена на рис. 4.5.

Влияние внешней среды на деятельность предприятия определяется, с одной стороны, объективно сложившимися внешними условиями функционирования ПСС, и, с другой стороны, взаимодействием с контрагентами данного предприятия. Условия функционирования ПСС формируются под влиянием факторов внешней среды, представленных в таблице 4.1:

Таблица 4.1

Факторы внешней среды, воздействующие на производственно-сбытовую систему (ПСС)

Факторы	Характеристика
Экономические	• Уровень жизни • Уровень инфляции • Экономическая стабильность • Экономическая политика государства • Конъюнктура рынка • Конкуренты • Цены
Политические	• Государственная политика • Политическая стабильность

Окончание табл. 4.1

Факторы	**Характеристика**
Правовые	• Законодательство • Формы собственности
Социальные	• Нормы поведения • Уровень образованности • Демографическая ситуация
Экологические	• Экологическая обстановка
Научно-технические	• Развитие науки • Развитие технологии

Если влияние перечисленных факторов внешней среды предприятие может только учесть в своей производственно-сбытовой деятельности, то взаимодействие с контрагентами подразумевает наличие двухсторонней связи. Таким образом, под контрагентами ПСС подразумеваются те элементы внешней среды, с которыми предприятие взаимодействует в процессе производственно-сбытовой деятельности, посредством различного рода двухсторонних потоков, обеспечивающих необходимое функционирование внутренних процессов в ПСС.

Внешние контрагенты ПСС можно разделить на следующие группы:

- поставщики ресурсов;
- потребители предметов производства ПСС;
- сторонние организации.

В группе *поставщики* объединены объекты, предоставляющие предприятию все ресурсы (материальные, трудовые, информационные, финансовые), необходимые для функционирования ПСС. В данную группу входят поставщики:

1) трудовых ресурсов;
2) производственных и сырьевых ресурсов;
3) услуг;
4) технологий и информации;
5) финансовых ресурсов.

В качестве поставщиков финансовых ресурсов могут выступать:

- банки;
- рынок ценных бумаг;
- федеральный и местный бюджеты.

Под *потребителями предметов производства ПСС* понимаются те контрагенты, на удовлетворение потребностей которых направлена производственно-хозяйственная деятельность предприятия.

В зависимости от предметов производства, выпускаемых ПСС, потребителями этих предметов могут быть:

- конечные потребители;
- другие ПСС;
- сбытовые организации.

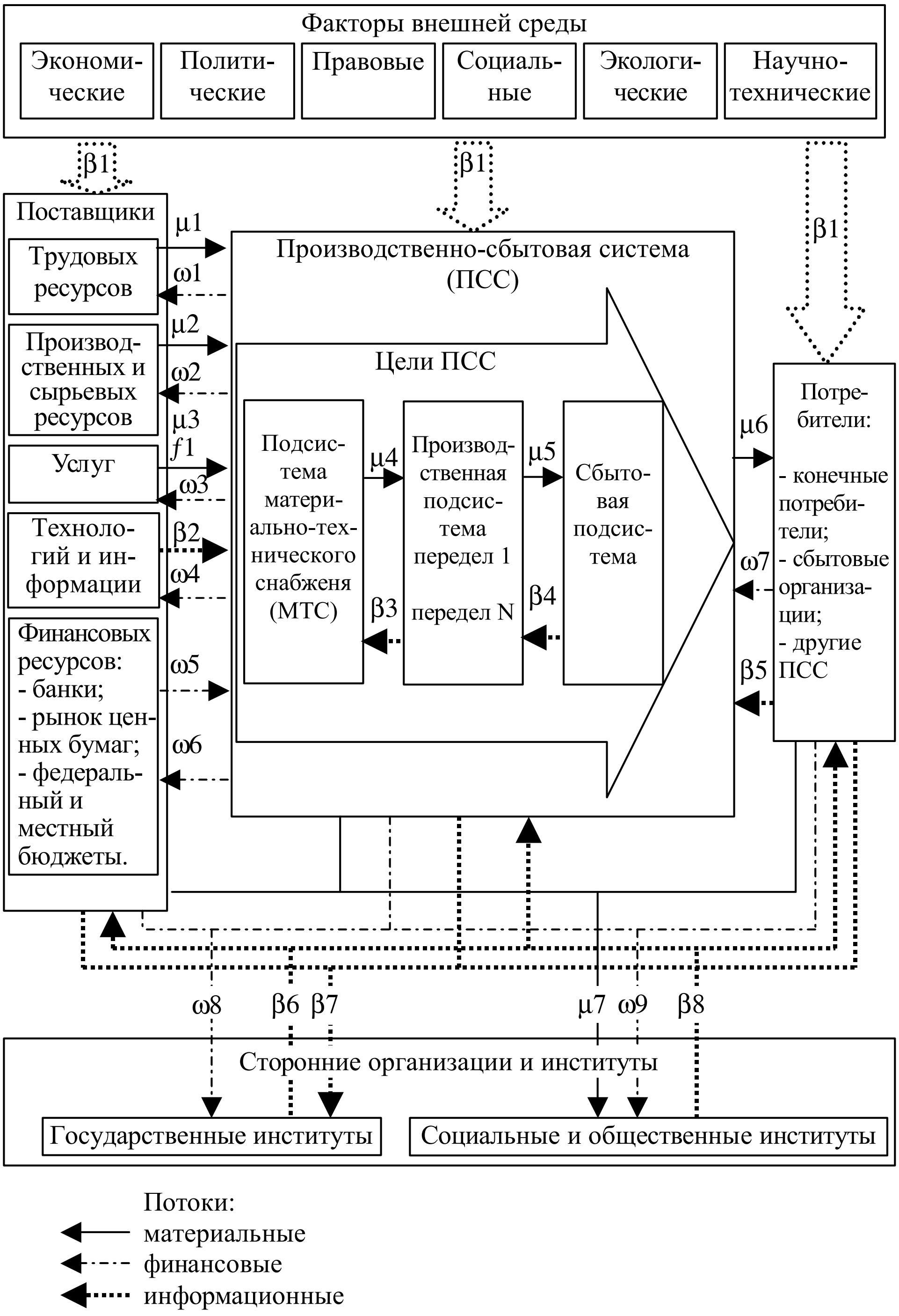

Рис. 4.5. Принципиальная схема функционирования производственно-сбытовой системы предприятия

Третью группу контрагентов ПСС — *сторонние организации* — представляют элементы внешней среды, которые непосредственно не участвуют в цепочке поставщики — ПСС — потребители, но также оказывают прямое воздействие на функционирование предприятия.

Все сторонние организации можно разделить на:

- государственные институты;
- социальные и общественные институты.

Государственные институты выполняют контрольные и регулирующие функции, используя финансовые инструменты воздействия и законодательные рычаги власти. Государственными институтами являются:

1. Государственный бюджет (организации, обеспечивающие его выполнение).
2. Система государственного контроля, включающая:
    - налоговую инспекцию;
    - государственную противопожарную службу;
    - санитарно-эпидемиологическую службу;
    - таможенные органы;
    - экологическую инспекцию и т. д.

Общественные институты выполняют функции защиты прав сотрудников, обеспечения надлежащего уровня жизни сотрудников, а также защиты окружающей среды.

Общественные институты включают:

1. Профсоюзы.
2. Социальную инфраструктуру (жилые здания, школы, поликлиники, спортивные сооружения и т. п.).
3. Организации по защите окружающей среды и т. д.

Описание схемы взаимодействия ПСС с элементами внешней среды. ПСС взаимодействует с элементами внешней среды посредством передачи материальных и нематериальных ресурсов, осуществляемой с помощью различного рода потоков: материальных, финансовых, информационных.

Под материальными потоками понимаются каналы передачи производственных (сырьевых, трудовых) и непроизводственных (транспортных, складских и т. д.) ресурсов, необходимых для производственно-хозяйственной деятельности.

Финансовые потоки — передача финансовых ресурсов, необходимых для функционирования ПСС.

К информационным потокам относятся данные о состоянии и функционировании тех или иных элементов, управляющая информация, используемая для координации, оптимизации и контроля работы системы.

Рассматриваются основные виды потоков, существующие в производственно-сбытовой системе:

Материальные потоки:

- $\mu1$ — обеспечение предприятия трудовыми ресурсами;
- $\mu2$ — обеспечение предприятия средствами производства, сырьем, материалами, полуфабрикатами;
- $\mu3$ — оказание предприятию услуг, необходимых для функционирования ПСС;
- $\mu4$ — удовлетворение потребности производства в производственных ресурсах;

- μ5 — выполнение предприятием производственной программы — поступление в сбытовую подсистему заданного количества продукции;
- μ6 — поставка продукции потребителям;
- μ7 — услуги по созданию или поддержанию социальной инфраструктуры предприятия (строительство объектов, проведение общественных мероприятий и т. д.), выполнение работ по повышению экологической безопасности предприятия.

Финансовые потоки:

- ω1, ω2, ω3, ω4 — оплата предприятием трудовых ресурсов, производственных и сырьевых ресурсов, услуг, технологий и информации соответственно;
- ω5 — финансирование (или субсидирование) предприятия банками, из государственного и региональных бюджетов, получение денежных средств путем выпуска и размещения ценных бумаг;
- ω6 — погашение предприятием полученных ссуд, кредитов, выплата дивидендов;
- ω7 — оплата потребителями продукции и услуг предприятия;
- ω8 — выплаты и отчисления в государственный или региональный бюджеты согласно налоговому законодательству, нормативам отчислений в фонд социального страхования, пенсионный фонд, выплата таможенных пошлин и т. п.;
- ω9 — выделение средств предприятием на поддержание и развитие социальной инфраструктуры, экологической инфраструктуры и т. п.

Информационные потоки:

- β1 — воздействие факторов внешней среды (см. табл. 4.1) на функционирование ПСС;
- β2 — предоставление предприятию информации и технологий, необходимых для функционирования ПСС;
- β3 — данные о потребности в производственных ресурсах;
- β4 — производственная программа ПСС;
- β5 – информация об объемах реализации продукции, емкости рынка, потребностях потребителей и т. п.;
- β6 — государственный контроль и регулирование производственно-хозяйственной деятельности предприятия посредством законодательных рычагов власти;
- β7 — предоставление предприятием необходимой информации государственным контрольным органам;
- β8 — общественный контроль над деятельностью ПСС со стороны общественных организаций: профсоюзов, организаций по защите окружающей среды и т. п.

Обоснование необходимости создания организационно-экономической системы управления запасами для нестационарных детерминированных условий. Предметом настоящей главы является эффективное управление материальными запасами предприятия в условиях нестационарности внешней и внутренней среды ПСС. Материальные запасы возникают в результате различия входящих и исходящих материальных потоков в следующих подсистемах ПСС (см. рис. 4.5):

- подсистема материально-технического снабжения;
- производственная подсистема (передел 1, …, передел N);
- сбытовая подсистема предприятия, в том числе система сервисного обслуживания.

В зависимости от места возникновения материальный запас может собой представлять:

- сырье;
- основные и вспомогательные материалы;
- полуфабрикаты;
- детали;
- готовые изделия;
- запасные части для ремонта.

Материальные запасы в ПСС могут достигать больших объемов, что влечет за собой значительные расходы на содержание и пополнение этих запасов.

В то же время функционирование каждой ПСС направлено на достижение определенной стратегической цели, в качестве которой примем цель обеспечения организационно-экономической устойчивости предприятия при условии повышения производственно-экономической эффективности функционирования ПСС.

Рассмотрим взаимосвязь достижения стратегической цели предприятия и оптимизации управления материальными запасами в условиях нестационарности. Для этого рассмотрим влияние эффективности управления материальными запасами на:

- организационно-экономическую устойчивость ПСС;
- производственно-экономическую эффективность функционирования ПСС.

Влияние эффективности управления материальными запасами на организационно-экономическую устойчивость ПСС. Под сохранением устойчивого положения (функционирования) предприятия (ПСС) в рыночной среде понимается способность предприятия сохранять (или наращивать) объемы реализации продукции (работ, услуг) длительный период времени при различных изменениях в инфраструктуре и при колебаниях потребительского спроса. Говоря об устойчивости положения предприятия, следует иметь в виду организационно-экономическую его устойчивость. Организационно-экономическая устойчивость предприятия — это состояние оптимального упорядочения взаимосвязей и формирования пространственно-временной последовательности взаимодействия материальных, информационных и финансовых элементов предприятия, представленных на рис. 4.5 в виде принципиальной схемы функционирования ПСС, а также материальных, финансовых и информационных потоков.

Для оценки организационно-экономического положения ПСС используется интегральный показатель устойчивости ПСС — $J_{\text{ПСС}}$ [8], который является функцией целого ряда показателей, характеризующих:

- финансово-экономическую стабильность предприятия;
- производственно-хозяйственную деятельность предприятия;
- экологию производственной деятельности предприятия;
- степень удовлетворения потребительского спроса;
- функционирование предприятий в условиях конкуренции;
- рыночную среду потребителей;
- рыночную среду поставщиков;
- изменение рыночной среды.

Перечисленные показатели группируются в блоки по трем основным направлениям, которые характеризуют и формируют устойчивое положение предприятия в рыночной среде (рис. 4.6):

1. Внутрисистемная производственная среда.
2. Функционирование предприятия в рыночной среде.
3. Рыночная среда.

Эффективность управления материальными запасами напрямую влияет на финансово-экономическую стабильность предприятия, а в конечном итоге на организационно-экономическую устойчивость предприятия (см. рис. 4.6). Покажем, каким образом эффективность управления материальными запасами влияет на финансово-экономическую стабильность предприятия.

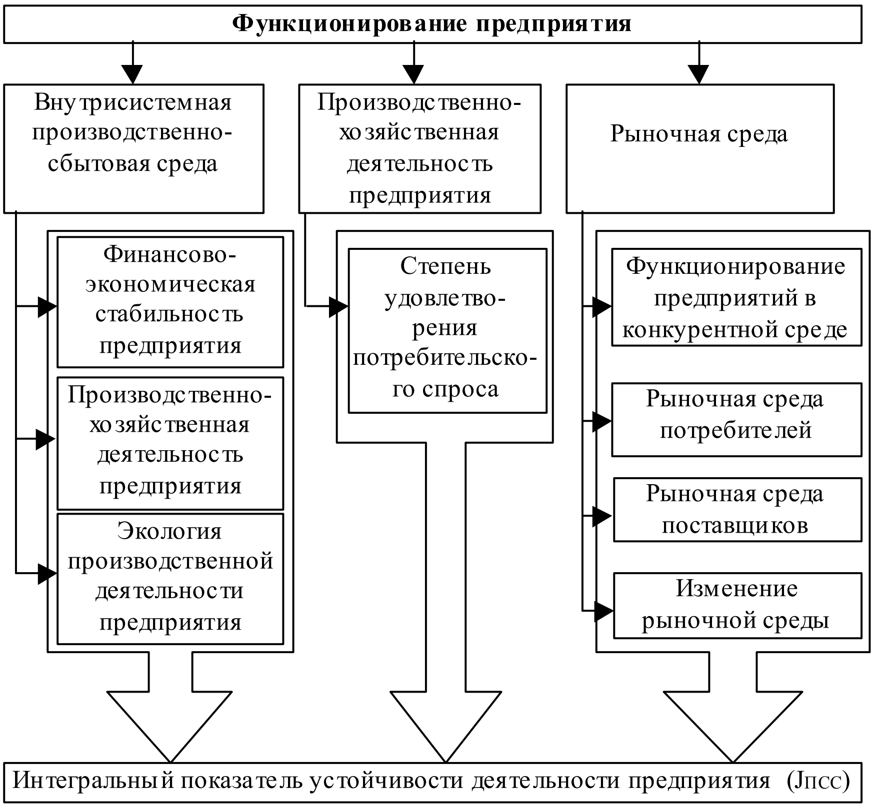

Рис. 4.6. Показатели, характеризующие предприятие в рыночной инфраструктуре

При анализе финансово-экономической стабильности ставится задача оценить ликвидность компании с точки зрения долгосрочных перспектив, то есть ее способность выполнять свои долгосрочные обязательства. Сущность финансовой устойчивости состоит в обеспеченности затрат и запасов (материальных оборотных средств) компании источниками их формирования, которыми обычно являются краткосрочные обязательства.

В качестве оценочных коэффициентов, характеризующих финансово-экономическую стабильность предприятия, используются следующие показатели [15], [18]:

1. *Коэффициент собственного капитала (автономии)* — характеризует независимость предприятия от заемных источников средств, равен доле источников собственных средств в общем итоге баланса:

$$k_A = \frac{И^с}{B},$$

где $И^с$, B — значения, соответствующие строкам баланса: источники собственных средств, баланс.

Поскольку итог баланса B представляет собой сумму статей баланса (активной или пассивной его части), а материальные запасы являются одной из статей актива, величину B можно выразить как:

$$B = Z + A^z, \qquad (4.14)$$

где Z — величина статьи баланса «Запасы»;

A^z — величина активной части баланса за вычетом величины статьи «Запасы».

Таким образом, коэффициент автономии можно выразить:

$$k_A = \frac{И^с}{Z + A^z}.$$

Нормальное номинальное значение коэффициента автономии оценивается на уровне 0,5 и означает, что все обязательства предприятия могут быть покрыты его собственными средствами.

2. *Коэффициент соотношения заемных и собственных средств* — отношение величины обязательств предприятия к величине его собственных средств:

$$k_{з/с} = \frac{B - И^с}{И^с},$$

где $(B - И^с)$ — величина заемных средств (обязательств) предприятия.

Исходя из (4.14), получим:

$$k_{з/с} = \frac{Z + A^z - И^с}{И^с}.$$

Увеличение показателя демонстрирует рост финансовой зависимости компании.

3. *Коэффициент маневренности* — отношение собственных оборотных средств предприятия $Е^с$ к общей величине источников собственных средств $И^с$:

$$k_м = \frac{E^c}{И^с}.$$

Собственные оборотные средства E^c — разность между текущими активами и текущими обязательствами (увеличенную на сумму краткосрочных кредитов):

$$E^c = T^a - T^о,$$

где T^a, $T^о$ — величина текущих активов и обязательств соответственно.

Поскольку величина текущих активов включает стоимость материальных запасов, то:

$$T^a = Z + T^{az},$$

где Т^{az} — сумма текущих активов за вычетом величины материальных запасов.

Таким образом:

$$k_м = \frac{Z + T^{az} - T^o}{\text{И}^\text{c}}.$$

Коэффициент маневренности показывает, какая часть собственных средств предприятия находится в мобильной форме, позволяющей относительно свободно маневрировать этими средствами. Высокое значение этого коэффициента положительно характеризует финансовое состояние предприятия. В качестве оптимального значения $k_м$ считается значение 0.5.

4. *Коэффициент обеспеченности собственными оборотными средствами* — отношение величины собственных оборотных средств к общей величине оборотных средств предприятия:

$$k_o = \frac{E^c}{T^a} = \frac{Z + T^{az} - T^o}{Z + T^{az}}.$$

Чем выше данный коэффициент, тем лучше финансовое состояние предприятия.

В табл. 4.2 представлена сводная информация о коэффициентах, характеризующих финансово-экономическую стабильность предприятия, откуда видно, что значение каждого коэффициента, характеризующего финансово-экономическую стабильность компании, зависит от уровня материальных запасов на предприятии.

Таблица 4.2

Показатели финансово-экономической стабильности предприятия

Показатель	**Расчетная формула**	**Оптимальное значение**	**Способ достижения оптим. значения**
Коэффициент автономии	$k_A = \frac{\text{И}^\text{c}}{Z + A^z}$	0.5 …1 чем выше значение, тем лучше	уменьшение величины Z
Коэффициент отношения заемных и собственных средств	$k_{з/с} = \frac{Z + A^z - \text{И}^\text{c}}{\text{И}^\text{c}}$	чем меньше значение, тем лучше	уменьшение величины Z
Коэффициент маневренности	$k_м = \frac{Z + T^{az} - T^o}{\text{И}^\text{c}}$	0.2 … 0.5	нахождение оптимального значения Z
Коэффициент обеспеченности собственными средствами	$k_o = \frac{Z + T^{az} - T^o}{Z + T^{az}}$	0.1 … 0.5 чем выше значение, тем лучше	нахождение оптимального значения Z

В условиях нестационарности внешних и внутренних условий функционирования предприятия эффективное управление материальными запасами, заключающееся в поддержании оптимального уровня запаса (не всегда совпадающего с минимально допустимым уровнем), позволит улучшить финансово-экономическую стабильность, а в конечном итоге повысить организационно-экономическую устойчивость предприятия.

Влияние эффективности управления материальными запасами на повышение производственно-экономической эффективности функционирования ПСС. Производственно-экономическая эффективность функционирования ПСС оценивается с помощью показателей прибыльности (рентабельности) [18], которые в зависимости от анализируемого аспекта деятельности компании подразделяются на:

1) *коэффициент рентабельности продаж* — характеризует эффективность реализации продукции, а также оценивает долю себестоимости в продажах:

$$r_R = \frac{P^{op}}{R},$$

где P^{op} — величина операционной прибыли компании;

R — выручка от реализации продукции;

2) *коэффициент рентабельности активов* — наиболее общий показатель, характеризующий эффективность использования активов компании и равный отношению валовой прибыли от реализации (операционной прибыли) к среднегодовому итогу баланса:

$$r_A = \frac{P^{op}}{B} = \frac{P^{op}}{Z + A^z}. \tag{4.15}$$

Повышение рентабельности характеризует увеличение эффективности хозяйственной деятельности предприятия. Из (6.15) видно, что уровень материального запаса Z влияет на рентабельность активов предприятия, поэтому одной из мер увеличения эффективности хозяйственной деятельности компании в ряде случаев является сокращение материального запаса и поддержание его на оптимальном уровне.

Таким образом, эффективное управление материальными потоками, позволяющее оптимизировать уровень материального запаса на предприятии, способствует повышению производственно-экономической эффективности функционирования ПСС.

Параметры измерения эффективности управления материальными запасами. Оптимизация уровня материальных запасов на предприятии за счет более эффективного управления материальными потоками — необходимое условие для достижения основной цели предприятия — обеспечения организационно-экономической устойчивости предприятия при условии повышения производственно-экономической эффективности функционирования ПСС.

В условиях нестационарности внешней и внутренней среды предприятия намного сложнее добиться оптимального уровня материального запаса. Определение оптимальной стратегии управления запасами становится особенно актуальным, поскольку может значительно улучшить коэффициенты организационно-экономической устойчивости и рентабельности активов предприятия.

Эффективность использования материальных запасов выражается в их оборачиваемости (скорости оборота) [19]. В качестве основных рассчитываемых показателей, характеризующих оборачиваемость товарно-материальных запасов, принимаются следующие показатели:

1) коэффициент оборачиваемости запасов (в оборотах):

$$k_z = \frac{S^z}{Z^{sr}},$$

где S^z — себестоимость проданных товаров, продукции, работ, услуг за отчетный период (например, за один год);

Z^{sr} — себестоимость запасов, усредненных за отчетный период;

2) продолжительность оборота (срок хранения) запасов (в днях):

$$t_z = \frac{360}{k_z}.$$

Ускорение оборачиваемости материальных запасов уменьшает потребность в них, позволяет предприятиям высвобождать часть оборотных средств либо для непроизводственных или долгосрочных производственных нужд предприятия (абсолютное высвобождение), либо для дополнительного выпуска продукции (относительное высвобождение).

Так как в результате ускорения оборота меньше требуется товарно-материальных запасов, высвобождаются денежные ресурсы, ранее вложенные в эти запасы. Высвобожденные денежные ресурсы откладываются на расчетном счете предприятий. В результате улучшается их финансовое состояние, укрепляется платежеспособность.

Увеличение скорости оборота товарных запасов возможно как за счет улучшения межзаводских связей, налаживания поставок и сбыта, ускорения расчетов и документооборота, так и за счет реализации более эффективной стратегии управления запасами, под которой понимается оптимальная схема движения материальных потоков.

Результатом функционирования разрабатываемой в настоящей работе организационно-экономической системы управления материальными запасами должен быть рост оборачиваемости материальных запасов в нестационарных детерминированных условиях за счет реализации наиболее эффективной стратегии управления запасами.

Разработка основных принципов создания нестационарных детерминированных систем управления запасами. Для формализации процессов управления запасами необходимо сначала рассмотреть их классификацию и виды [7].

Понятие запаса пронизывает все области материального производства, так как материальный поток на пути движения от первичного источника сырья до конечного потребителя может накапливаться в виде запаса на любом участке. Причем управление запасами на каждом из участков имеет свою специфику. Среди критериев классификации запасов выделяются два параметра движения материальных потоков — пространство (или место нахождения) и время, а также функция запаса (см. рис. 4.7).

Рис. 4.7. Критерии классификации зпасов

Классификация по месту нахождения приведена на рис. 4.8. Все запасы, имеющиеся в экономике, определены как совокупные. Они включают в себя сырье, материалы основные и вспомогательные, полуфабрикаты, детали, готовые изделия, а также запасные части для ремонта средств производства. Основная часть совокупных запасов производства представляет собой предметы производства, входящие в материальный поток на различных стадиях его технологической переработки.

Рис. 4.8. Виды запасов по месту нахождения и исполняемой функции

Совокупные запасы производства, как видно из рис. 4.8, подразделяются на два вида: производственные и товарные запасы.

Производственные запасы формируются в организациях-потребителях. *Товарные запасы* находятся у организаций-изготовителей на складах готовой продукции, а также в каналах сферы обращения. Запасы в каналах сферы обращения разбиваются на запасы в пути и запасы на предприятиях торговли. Запасы в пути (или транспортные запасы) находятся на момент учета в процессе транспортировки от поставщиков к потребителям.

Производственные запасы предназначены для производственного потребления. Они должны обеспечивать бесперебойность производственного процесса. Производственные запасы учитываются в натуральных, условно-натуральных и стоимостных измерителях. К ним относятся предметы труда, поступившие к потребителю различного уровня, но еще не использованные и не подвергнутые обработке.

Товарные запасы необходимы для бесперебойного обеспечения потребителей материальными ресурсами.

Классификация по исполняемой функции запасов позволяет разделить производственные и товарные запасы на несколько имеющих различные функции групп (см. рис. 4.8): текущие, подготовительные, страховые, сезонные и переходящие.

Текущие запасы обеспечивают непрерывность снабжения производственного и сбытового процессов между двумя поставками. Текущие запасы составляют основную часть производственных и товарных запасов. Их величина постоянно меняется.

Подготовительные запасы (или запасы буферные) выделяются из производственных запасов при необходимости дополнительной их подготовки перед использованием в производстве (сушка леса, например). Подготовительные товарные запасы формируются в случае необходимости подготовить материальные ресурсы к отпуску потребителям.

Гарантийные запасы (или запасы страховые) предназначены для непрерывного снабжения потребителя в случае непредвиденных обстоятельств: отклонения в периодичности и в величине партий поставок от запланированных, изменения интенсивности потребления, задержки поставок в пути. В отличие от текущих запасов размер гарантийных запасов — величина постоянная. При нормальных условиях работы эти запасы неприкосновенны.

Сезонные запасы образуются при сезонном характере производства продуктов, их потребления или транспортировки. Сезонные запасы должны обеспечить нормальную работу организации во время сезонного перерыва в производстве, потреблении или в транспортировке продукции.

Переходящие запасы — это остатки материальных ресурсов на конец отчетного периода. Они предназначаются для обеспечения непрерывности производства и потребления в отчетном и следующим за отчетным периоде до очередной поставки.

Классификация во времени позволяет выделить различные количественные уровни запасов. Их соотношение показано на рис. 4.9.

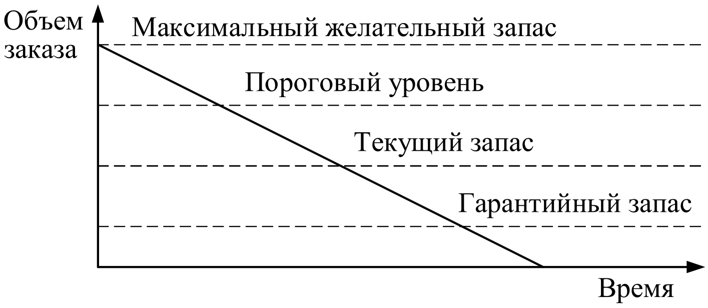

Рис. 4.9. Виды запасов по времени учета

Максимальный желательный запас определяет уровень запаса, экономически целесообразный в данной системе управления запасами. Этот уровень может повышаться. В различных системах управления максимальный желательный запас используется как ориентир при расчете объема заказа.

Пороговый уровень (или точка заказа) запаса используется для определения момента времени выдачи очередного заказа.

Текущий запас соответствует уровню запаса в любой момент учета. Он может совпасть с максимальным желательным уровнем, пороговым уровнем или гарантийным запасом.

Гарантийный запас (или запас страховой) аналогичен гарантийному запасу в классификации по исполняемой запасом функции и предназначен для непрерывного снабжения потребителя в случае непредвиденных обстоятельств.

Можно также выделить *неликвидные запасы* — так называют длительно неиспользуемые производственные и товарные запасы. Они образуются вследствие ухудшения качества товаров во время хранения, а также морального износа. Это единственный вид запаса, который не соответствует определенным выше критериям.

Общая классификация материальных запасов приводится на рис. 4.10.

Рис. 4.10. Общая классификация материальных запасов

В настоящей главе рассматривается управление текущим запасом независимо от его места нахождения (производственный запас, товарный запас). Управление уровнем текущего запаса производится согласно стратегии управления запасами. Метод выбора оптимальной стратегии управления запасами для нестационарных детерминированных систем будет рассмотрен ниже.

Классификация и виды моделей управления запасами. *Управление запасами* заключается в установлении моментов времени и объемов заказа на восполнение их и распределении вновь прибывшей партии по нижестоящим звеньям системы снабжения. Совокупность правил, по которым принимаются эти решения, предствляют собой *стратегию* управления запасами [16].

Каждая такая стратегия связана с определенными (чаще всего в вероятностном смысле) затратами по доведению материальных средств до потребителей. Будем считать оптимальной стратегию управления запасами, которая минимизирует эти затраты. Отыскание оптимальных стратегий — предмет *теории оптимального управления запасами.* Естественно при сравнении стратегий учитывать лишь переменные составляющие функции затрат, зависящие от выбора стратегии. Таким образом, во многих моделях управления запасами удается игнорировать большую часть затрат на содержание управленческого аппарата (кроме расходов по оформлению поставок), а также пропорциональную объему партии стоимость *производства* материальных средств, которая на достаточно длительном отрезке времени определяется суммарным спросом и не зависит от организации снабжения.

Математическая формулировка задачи отыскания оптимальной стратегии существенно зависит от исследуемой реальной ситуации. Однако общность принимаемых в расчет факторов позволяет говорить о единой модели управления запасами. Приведем ее качественное описание, ограничившись для простоты одним складом, на который поступает случайный поток однородных в качественном отношении требований — заявок от потребителей.

Эти заявки немедленно удовлетворяются до тех пор, пока их суммарный объем (с начала планируемого периода) не превысит начального запаса. Все последующие требования не могут быть обслужены тотчас же, вследствие чего потребитель простаивает и несет некоторый убыток. Этот убыток относится на счет системы снабжения — она выплачивает штраф. Время от времени запас хранимого имущества пополняется со склада стоящего выше объединения, центральной базы или из промышленности, причем с каждым таким пополнением связаны определенные дополнительные затраты. Наконец, склад несет расходы по хранению находящегося в нем имущества. Требуется так выбрать объем и момент заказа пополнения, чтобы суммарные расходы на хранение, штраф и поставки были минимальны (ср. с моделями, рассмотренными в разделе 4.1). На работу склада могут быть наложены некоторые ограничения (например, максимальный запас не должен превышать вместимость склада). В этих случаях разыскивается условный минимум затрат.

Основные элементы задачи оптимального управления запасами:

1) система снабжения;
2) спрос на предметы снабжения;
3) возможность пополнения запасов;
4) функции затрат (в частном случае — цены);
5) ограничения;
6) принятая стратегия управления запасами.

Здесь «стратегия» понимается в смысле терминологии теории принятия решений, т. е. как выбранная снабженцем линия поведения, полностью определяющая его действия в рамках рассматриваемой модели.

Классификация моделей управления запасами. Многообразие реальных ситуаций вызвало необходимость в рассмотрении огромного числа вариантов задачи управления запасами, которые систематизированы лишь частично. Использование богатейшего материала, накопленного теорией управления запасами, немыслимо без его упорядочения в рамках единой классификации. В основу такой классификации естественно положить различия по перечисленным выше основным элементам модели. При классификации работ по управлению запасами целесообразно, кроме того, учитывать цель исследования и применяемый математический аппарат.

Под *системой снабжения* понимается совокупность складов, между которыми в ходе операций по снабжению осуществляются перевозки хранимого имущества. Функция затрат составляется и минимизируется для системы в целом, а не для каждого склада порознь. Возможны два варианта построения систем снабжения: децентрализованный (однокаскадный) и эшелонированный (многокаскадный). В первом случае все склады непосредственно обслуживают потребителей, и недостача на одном или нескольких складах по решению органа управления снабжением может быть покрыта за счет избытка запаса на других складах. Источник пополнения запасов для всех складов принимается неисчерпаемым. Во втором случае каждая недостача покрывается за счет конечных запасов склада высшей ступени. Число каскадов может достигать 4–5. В свою очередь многокаскадные системы делятся на линейные (у каждого склада — один потребитель) и пирамидальные. В большинстве работ по управлению запасами рассматривается случай одного склада.

Системы снабжения классифицируются также по числу хранимых номенклатур (однокомпонентные и многокомпонентные) и по стабильности свойств хранимого имущества. Чаще всего предполагается, что ни свойства, ни количество хранимого имущества не подвержены естественным изменениям. Однако могут быть случаи его естественной порчи (продукты питания) или, наоборот, возрастания «полезности» предметов хранения со временем (вина, произведения искусства). При изменении свойств предметов хранения со временем и при наличии нескольких партий с различными датами выпуска задача приобретает дополнительный аспект — необходимо решить, за счет какой партии удовлетворить очередное требование.

Наконец, все системы снабжения в зависимости от постоянства их параметров и значений управляющих переменных можно разделить на статические и динамические. В первом случае рассматривается минимизация затрат за единственный период или в единицу времени, во втором — за указанное (возможно бесконечное) число периодов.

Спрос на предметы снабжения может быть:

а) стационарным или нестационарным;
б) детерминированным или стохастическим;
в) непрерывно распределенным или дискретным;
г) зависящим от спроса на другие номенклатуры или независимым.

Типичными примерами нестационарных ситуаций является торговля сезонными и модными товарами, а также период пикового (предпраздничного) спроса.

В случае дискретного спроса каждое отдельное требование дополнительно характеризуется своим объемом (числом заказанных единиц). Объем требования может быть постоянной или переменной (в частности, случайной с известным распределением) величиной. Требования постоянного объема без потери общности сводятся к единичным. Нестационарный спрос в очередной период может быть зависимым или независимым в смысле связи с предысторией процесса. Практически исследованы случаи стационарного и независимого (в обоих смыслах) спроса.

Пополнение запасов почти всегда происходит с некоторой случайной задержкой относительно момента выдачи требования. Одако роль и длина этой задержки сильно зависят от конкретных условий, что позволяет в ряде случаев упростить задачу. Степень возможного упрощения определяет один из следующих вариантов:

- мгновенная поставка;
- задержка поставок на фиксированный срок (в частности, кратный длине периода);
- случайная задержка с известным распределением длительности.

В некоторых моделях с задержкой, кроме обычной, вводится экстренная поставка (в случае недостачи на складе), которая, как правило, принимается мгновенной. Наличие такой поставки исключает отрицательные начальные уровни запаса.

Наконец, возможно различие в объеме поставок:

- поставка равна требуемому количеству;
- поставка является случайной величиной с характеристиками закона распределения, в общем случае зависящими от величины заказа.

Второй вариант имеет место в задачах планирования запасов сельскохозяйственных продуктов, при управлении водохранилищами, а также в эшелонированных системах снабжения.

Функции затрат в своей совокупности образуют критерий эффективности принятой стратегии и учитывают следующие издержки:

- расходы на хранение;
- транспортные расходы и затраты, связанные с заказом каждой новой партии;
- затраты на штрафы.

Иногда в минимизируемую функцию включаются (с отрицательным знаком) доходы, полученные от продажи остатков запаса в конце каждого периода.

В зависимости от особенностей исследуемой ситуации рассматриваются следующие варианты выбора отдельных составляющих функции затрат:

Издержки хранения:

- пропорциональные среднему уровню положительного запаса за период времени существования положительного запаса;
- пропорциональные положительному остатку к концу периода;
- пропорциональные максимальному запасу;
- нелинейные функции одного из вышеуказанных количеств.

Стоимость поставки (допускаются любые комбинации перечисленных ниже вариантов):

- пропорциональная объему поставки;
- постоянная, независимо от объема и числа номенклатур;
- сумма фиксированных составляющих — по числу номенклатур в заявке;
- пропорциональная необходимому приросту интенсивности производства.

Суммарный штраф:

- пропорциональный среднему уровню положительной недостачи за период времени существования недостачи;
- пропорциональный недостаче к концу периода;
- нелинейные функции одного из вышеуказанных количеств;
- постоянный (выплачивается при ненулевой недостаче).

В многономенклатурных задачах штрафы могут суммироваться или назначаться по максимальному дефициту (если требуется комплектное обеспечение спроса).

Ограничения в задачах управления запасами могут быть самого различного характера. Укажем следующие варианты ограничений:

- по максимальному объему (весу, стоимости) запасов;
- по средней стоимости;
- по числу поставок в заданном интервале времени;
- по максимальному объему (весу, стоимости) поставки или кратности этого объема некоторой минимальной величине (целое число стандартных «упаковок» — вагонов, цистерн, бочек, коробок);
- по доле требований, удовлетворяемых из наличного запаса (без дополнительных задержек).

Введение ограничений может существенно изменить формулировку задачи управления запасами. В частности, в стохастической модели без ограничений оптимальный запас, обращая в минимум сумму затрат на поставки, хранение и штрафы, автоматически дает наиболее выгодную вероятность недостачи. Ограничение же последнего типа полностью определяет сумму штрафа, что заставляет исключить ее из функции затрат и минимизировать расходы на поставки и хранение. Если расходы на хранение и поставки заданы, то отыскивается стратегия, максимизирующая вероятность обеспечения спроса. Такой вариант особенно часто встречается в многокомпонентных задачах.

Иногда в задаче управления запасами минимизируются не денежные расходы, а какой-либо другой дефицитный ресурс (вес, объем), обычно при заданной вероятности обеспечения многономенклатурного спроса. На математической стороне исследования такая замена, по существу, не отражается.

Стратегия управления запасами, т. е. структура правил определения момента и объема заказа, обычно считается известной, и задача сводится к определению нескольких констант (параметров стратегии). Оптимизация чаще всего проводится в классе так называемых простейших стратегий, описанных выше в настоящей работе.

Общая схема классификации моделей управления запасами приведена в табл. 4.3.

Разработка формализованного описания и схемы определения оптимальной стратегии обобщенной нестационарной детерминированной системы управления запасами. Существует достаточно большое количество признаков классификации систем управления запасами. Объектом настоящего исследования из приведенной классификации является класс систем управления запасами с нестационарным детерминированным спросом. Хотя характер спроса — наиболее значимый фактор, определяющий выбор стратегии управления запасами на предприятии. В реальных условиях другие параметры системы управления запасами также могут носить нестационарный и детерминированный характер и влиять на определение оптимальной стратегии. Таким образом, класс систем управления запасами с нестационарным детерминированным спросом можно расширить до класса *нестационарных детерминированных систем*, в котором любые параметры, характеризующие функционирование указанных систем, могут быть нестационарными Но в то же время они должны быть детерминированы (данные параметры не постоянны в течение анализируемого периода времени, а их значения известны заранее или могут быть спрогнозированы на рассматриваемый период времени с достаточной степенью точности).

В табл. 4.3 звездочками выделены возможные варианты систем управления запасами, относящиеся к исследуемому классу нестационарных детерминированных систем. Определим базовый вариант из указанного класса систем, для которого будет решаться задача определения оптимальной стратегии (для остальных вариантов данного класса систем управления запасами задача нахождения оптимальной стратегии будет решаться теми же методами, а переход к ней не составит большого труда). Опишем обобщенную нестационарную детерминированную систему в разрезе элементов задачи оптимального управления запасами.

Таблица 4.3

Классификация моделей управления запасами

		Признаки	**Варианты**	**Модификации**
Элементы задачи управления запасами	Ссистема снабжения	структура	Эшелонированная *	Линейная Пирамидальная *
			Однокаскадная *	
		динамика операций	отсутствует (статический вариант)	
			имеется (динамический вариант)*	
		число компонент	Однокомпонентная *	
			Многокомпонентная *	
		Изменение свойств хранимого имущества со временем	не меняются *	
			Меняются *	Ухудшаются Улучшаются *
	Спрос	стационарность	Стационарный	
			Нестационарный *	Периодический Непериодический (зависимый и независимый от спроса в предыдущем периоде) *
		полнота имеющейся информации	детерминированный *	
			стохастический	с известным распределением спроса с неизвестным распределением спроса
		дискретность	непрерывный *	
			дискретный с объемом требования *	Постоянным *
				Переменным *
				Случайным
		связь по различным компонентам	существует (зависимый спрос) *	
			отсутствует (независимый спрос) *	

Окончание табл. 4.3

		Признаки	**Варианты**	**Модификации**
	Пополнение запаса	задержка	отсутствует *	
			фиксированная *	целое число периодов *
				дробное число периодов
			случайная	
		способ ликвидации недостач	накопление отказов от очередной поставки	
			экстренные поставки	
		объем поставки	равен требуемой *	
			случайная величина	
	Функции затрат	расходы на хранение	линейная функция *	Среднего времени обеспечения спроса и среднего запаса остатка к концу периода *
			нелинейная функция *	
		расходы на штрафы по каждой компоненте порознь	постоянная величина при ненулевой недостаче *	
			линенйная функция *	Среднего времени недостачи и средней недостачи Недостачи к концу периода *
			нелинейная функция *	
		расходы на штрафы в многокомпонентной системе	сумма штрафов по всем компонентам *	
			Максимальный из штрафов по отдельным компонентам *	
		расходы на поставки	Постоянные *	
			линейная функция объема поставок *	
			линейная функция числа номенклатур в заявке	
	Ограничения	исключают функцию штрафов	по максимальной вероятности недостачи	
		не исключают функцию штрафов	по весу *	
			по объему *	
			по максимальной поставке *	
			по частоте поставок *	
	Стратегия (простейшая)	тип	периодическая	$(\tau_{\text{сз}}, Q_{\max})$
				$(\tau_{\text{сз}}, q^*)$
			критических уровней	$(Q_{\text{з}}, Q_{\max})$
				$(Q_{\text{з}}, q^*)$

Система снабжения. В качестве системы снабжения рассматривается система со следующими характеристиками:

1. Вид системы снабжения — система с одним складом.
2. Число хранимых номенклатур — одна номенклатура.
3. Свойства хранимого имущества со временем не меняются.
4. Имеется динамика операций (динамическая система).

Спрос на предметы снабжения характеризуется следующими параметрами:

1. Нестационарный спрос, независящий от спроса в предыдущем периоде.
2. Детерминированный спрос.
3. Непрерывный спрос.
4. Спрос на одну номенклатуру не зависит от спроса на другую.

Пополнение запасов характеризуется следующими положениями:

1. Величина задержки поставок фиксирована.
2. Величина поставки равна требуемому количеству.
3. Способ ликвидации недостач — накопление отказов от очередной поставки.

Элементы **функции затрат** имеют следующий вид:

1. Расходы на хранение — получены интегрированием расходов на хранение в течение отчетного периода.
2. Расходы на штрафы — линейная функция недостачи.
3. Расходы на поставки — пропорциональны объему поставок.

Оптимизация проводится при действии следующих ограничений:

1. Ограничения по объему текущего запаса.
2. Ограничения по максимальной поставке.
3. Ограничения на частоту поставок.

В отличие от простейших систем управления запасами, где под стратегией понимается набор правил определения момента и объема заказа, и эти правила полностью обусловлены выбором системы, а задача оптимального управления запасами сводится к определению оптимальных значений параметров системы, в нестационарных детерминированных системах нет заранее определенных правил определения момента и объема заказа. В данных системах в каждый отдельный момент времени t_i решение о заказе товара зависит от решений, принятых в предыдущие моменты времени, и основной задачей оптимального управления является задача определения оптимального плана поставок продукции на протяжении всего анализируемого периода времени T. Поэтому для нестационарных детерминированных систем **стратегией управления запасами** является план поставок продукции на рассматриваемый период времени. Оптимальная стратегия в данном случае никак не задается и является искомой.

Схема, моделирующая функционирование нестационарной детерминированной системы управления запасами в течение анализируемого периода времени с использованием множества допустимых стратегий и отбором оптимальной, представлена на рис. 4.11.

Раскроем более подробно основные понятия и элементы представленной схемы.

Стратегия управления запасами. Под стратегией управления запасами в настоящей работе понимается один из вариантов плана поставок продукции на предприятие в течение периода времени T, представленный в виде вектора:

$$G = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_i, \ldots, p_n)\ ,$$

где p_i — плановый объем поставки продукции на предприятие в момент времени t_i, $1 \le i \le n$.

В настоящей задаче время можно считать дискретной величиной, а величина шага изменения времени зависит от требуемой точности искомой стратегии и детализации известных значений нестационарных параметров на период T (например, можно выбрать шаг, равный одной неделе*, одному дню и т. п.). Количество дискретных моментов времени в течение периода* Т равно n.

Таким образом, общее количество всех возможных стратегий составит V^n, где V — общее количество вариантов объема поставки. Круг исследуемых стратегий можно значительно сузить, если учесть ограничения, напрямую касающиеся выбора стратегий (например, ограничение минимального или максимального интервала между поставками, ограничение на минимальную партию и т. п.). В результате такого отбора получаем множество стратегий G^1, G^2, …, G^m (такие стратегии генерируются в первом блоке схемы на рис. 4.11). Часть стратегий из данного множества может быть отброшена в дальнейшем из-за несоответствия косвенным ограничениям (например, если при реализации подобной стратегии в какой-то момент времени текущий складской запас превысит допустимую величину и т. п.)

Параметры системы управления запасами. Под параметрами системы управления запасами в настоящей работе понимаются все известные характеристики системы, ее окружения, значения внешних и внутренних факторов, которые влияют на выбор стратегии управления запасами и входят в выражения для ограничений или функции затрат. В рассматриваемой нестационарной системе управления запасами имеются как стационарные, так и нестационарные параметры.

Нестационарные параметры зависят от времени и задаются функциональными зависимостями вида $F(t)$. Так, для исследуемой системы управления запасами нестационарным параметром является величина спроса S_i ($i = 1..n$).

Стационарные параметры не зависят от времени и задаются константами (например, объем склада V_{skl}).

Ограничения системы управления запасами. Под ограничениями в рассматриваемой схеме понимаются условия, которым должна удовлетворять система управления запасами в каждый момент времени. Все ограничения задаются в виде неравенств вида:

$$X_i^{\min} \le x_i^{\,j} \le X_i^{\max}\ ,\ I = 1..n, j = 1..m,$$

где $x_i^{\,j}$ – значение контролируемого показателя системы в момент времени i при реализации стратегии j;

$X_i^{\min}$ — наименьшее допустимое значение контролируемого показателя системы в момент времени i;

$X_i^{\max}$ — наибольшее допустимое значение контролируемого показателя системы в момент времени i.

Если параметры $X_{\min}$ и $X_{\max}$ — стационарны (не зависят от времени), то аналогичное неравенство будет выглядеть так: $X_{\min} \le x_i^{\,j} \le X_{\max}$, $i = 1..n, j = 1..m$.

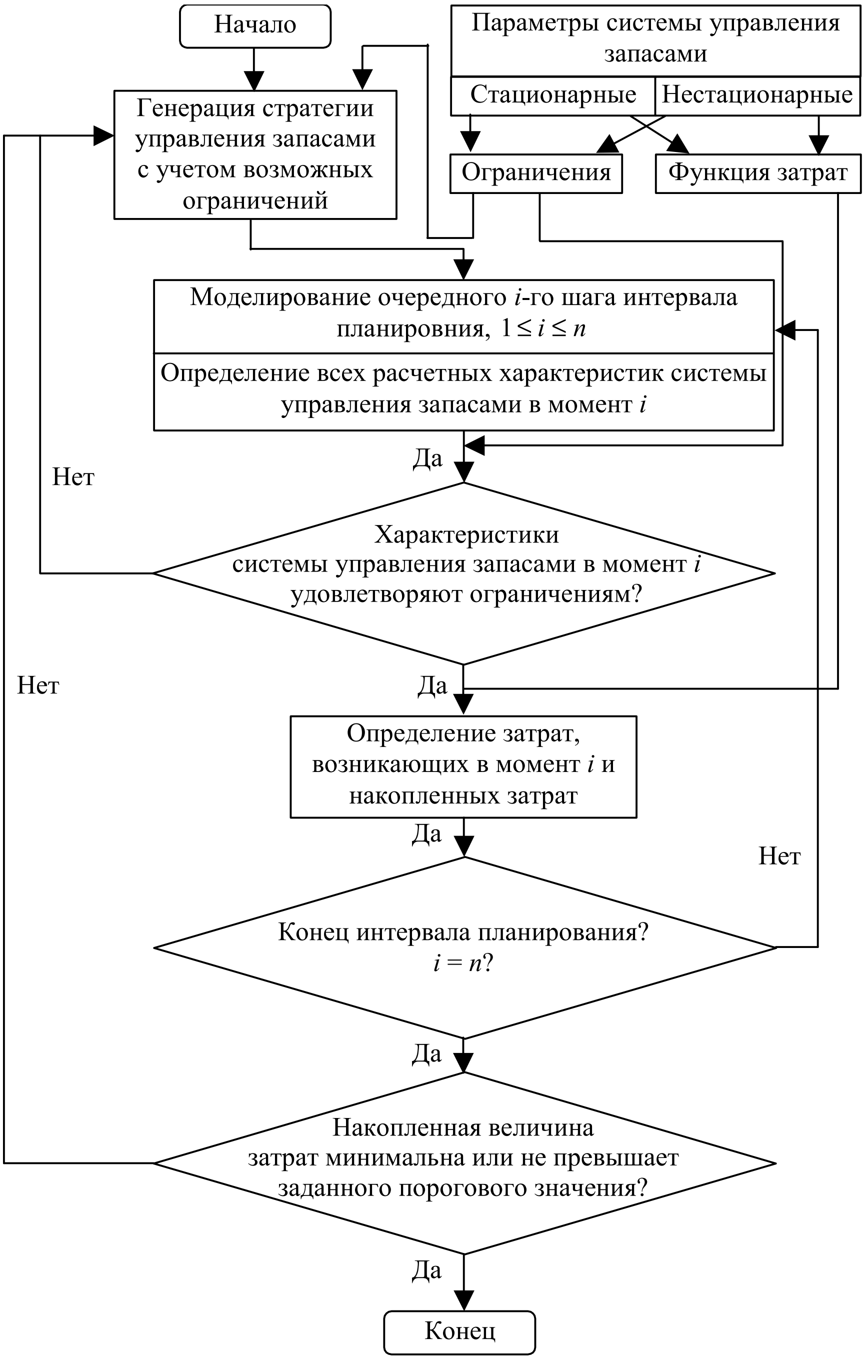

Рис. 4.11. Схема определения оптимальной стратегии управления запасами нестационарной детерминированной системы

Функция затрат. Под функцией затрат в настоящей задаче понимается функция вида:

$$F^j = \sum_{i=1}^{n} Z_i^j, i = 1..n,$$

где $Z_i{}^j$ — величина совокупных затрат, возникающих в системе момент времени i при реализации стратегии j.

Моделирование очередного i-го шага функционирования складской системы в плановом периоде T представляет собой определение всех необходимых расчетных и контролируемых характеристик складской системы в момент времени i при реализации стратегии управления запасами j.

Таким образом, работа схемы определения оптимальной стратегии управления запасами представляет собой моделирование функционирования складской системы предприятия при различных возможных стратегиях управления запасами G^j ($j = 1..m$). Если при моделировании каждого шага i ($i = 1..n$) функционирования складской системы предприятия при реализации стратегии j все контролируемые характеристики системы удовлетворяют ограничениям, то такая стратегия является допустимой. Для допустимых стратегий определяется величина функции затрат F^j, которая складывается из сумм затрат, возникающих на каждом шаге моделирования i стратегии j. Работа схемы определения оптимальной стратегии управления запасами заканчивается, когда определены функции затрат F^j для всех допустимых стратегий $G^{\text{доп}} \in \{G\}$. Оптимальной стратегией управления запасами на период T в рассматриваемой складской системе будет та стратегия G^k, для которой

$$F^k = \min_{G^j \in \{G^{\text{доп}}\}} (F^j),$$

где $\{G^{\text{доп}}\}$ — множество допустимых стратегий управления запасами для рассматриваемой складской системы.

В случаях, когда известна предпочтительная нижняя граница величины затрат Z, работа схемы прекращается в тот момент, как только находится допустимая стратегия G^k, для которой $F^k \leq Z$.

Представленная выше схема позволяет из множества возможных стратегий выбрать оптимальную, дающую минимальную величину затрат на создание и поддержание запасов в планируемом периоде T при условии соответствия имеющимся ограничениям.

Постановка оптимизационной задачи определения оптимальной стратегии управления запасами для нестационарной детерминированной системы. Выше было показано, что общее количество стратегий (V^n) при длительном интервале планирования T и большом количестве вариантов объема поставки продукции V очень велико. Поэтому даже максимально сузив круг исследуемых стратегий с учетом возможных ограничений и используя средства вычислительной техники потребуются значительные затраты времени для нахождения оптимальной стратегии путем перебора всех допустимых стратегий в конкретных условиях задачи. Если же необходимо пересчитывать оптимальную стратегию управления запасами постоянно и непрерывно, то нахождение оптимального решения с помощью полного перебора допустимых стратегий вообще теряет смысл, так как за время вычислений найденное решение потеряет свою актуальность.

Таким образом, необходим алгоритм решения исследуемой оптимизационной задачи. Чтобы определить метод и алгоритм решения задачи — необходимо ее формализовать. Исследуемая задача — это задача выбора в заданном множестве элемента, удовлетворяющего тем или иным критериям, поэтому является предметом исследования операций. Любая задача исследования операций включает описание множества допустимых решений (задается с помощью ограничений) и критерия оптимальности (целевой функции), на основании которого проводятся сравнительная оценка допустимых решений и выбор оптимального решения [5]. Для описания ограничений и целевой функции оптимизационной задачи перечислим исходные параметры исследуемой системы управления запасами.

Параметры системы управления запасами. В исследуемой нестационарной детерминированной системе управления запасами, описанной выше, заданы следующие параметры:

1. Известны границы и продолжительность периода времени, на который будет рассчитываться оптимальная стратегия управления запасами:

$$T_{\text{общ}} = [t_{\text{н}};\ t_{\text{к}}],$$

где $t_{\text{н}}$, $t_{\text{к}}$ — начальный и конечный моменты времени соответственно;

$T = t_{\text{к}} - t_{\text{н}}$ — продолжительность периода времени.

Будем считать время дискретной величиной с шагом $t_{\text{ед}}$ (день, неделя и т. п.). Тогда период планирования $T_{\text{общ}} = [t_{\text{н}};\ t_{\text{к}}]$ можно представить в виде последовательности дискретных интервалов (или моментов) времени — $i = 1..n$, где $n = T/t_{\text{ед}}$ — количество единичных интервалов времени в отчетном периоде.

В дальнейшем будем считать единицей учета времени дискретный интервал времени i ($i = 1..n$).

2. Известна потребность в продукции на планируемый интервал времени T (нестационарный параметр): Q_i , $i = 1...n$.
3. Если в системе не допускается дефицит товара на складе, то необходимо постоянно иметь определенный уровень запаса (страховой запас), чтобы избежать дефицита товара из-за влияния непредвиденных случайных факторов. Величина страхового запаса также может быть нестационарной и задаваться функцией: R_i, $i = 1…n$.
4. Известна стоимость единицы продукции: C_{pr}.
5. Известен минимальный, максимальный объем поставки, а также стандартный объем упаковки (коробки, паллеты, и т. п.):
   $P_{\min}$ — минимальный объем поставки (в единицах продукции),
   $P_{\max}$ — максимальный объем поставки (в единицах продукции),
   P_{st} — размер стандартной упаковки (в единицах продукции).
6. Известен минимальный возможный интервал времени между соседними поставками продукции: I. Это ограничение вызвано тем, что для большинства предприятий частота поставок товара поставщиком, а также частота приемки товара на склад ограничены техническими возможностями.
7. Известна емкость транспортной единицы, а также стоимость перевозки груза этой транспортной единицей:
   V_{tr} — емкость транспортной единицы (в единицах продукции);
   C_{tr} — стоимость одной перевозки одной транспортной единицей.

8. Известна емкость склада: V_{skl} (в единицах продукции).
9. Известна стоимость хранения единицы продукции на складе в единицу времени (переменная составляющая всех складских расходов): C_{skl}.
10. Известна величина утраченной выгоды из-за связывания оборотных средств в запасе (задается как доля стоимости хранимого запаса в единицу времени): U. Величина утраченной выгоды равна величине возможного гарантированного дохода при альтернативном вложении денежных средств (например, сумме банковского процента):

$$U = \frac{1+r}{T_{\text{год}} / t_{\text{ед}}},$$

где r — величина банковского годового процента;

$T_{\text{год}}$ — величина годового периода времени.

11. Известна величина штрафа из-за дефицита продукции на складе, выраженная в процентах к сумме дефицита в единицу времени: W.

Формирование целевой функции определения оптимальной стратегии управления запасами. Цель исследуемой оптимизационной задачи — нахождение оптимальной стратегии управления запасами, дающей минимальные совокупные затраты на создание и пополнение запаса за период планирования T. Поэтому в качестве целевой функции выбрана функция затрат:

$$F^j = \sum_{i=1}^{n} Z_i^j.$$

В процессе реализации какой-либо стратегии управления запасами G^j на предприятии возникают следующие виды затрат:

- транспортные издержки (стоимость доставки продукции на склад предприятия);
- затраты на хранение (стоимость эксплуатации склада);
- затраты, вызванные связыванием оборотных средств в товарном запасе;
- затраты, возникающие на предприятии из-за дефицита продукции на складе;
- затраты на заработную плату персонала;
- накладные расходы предприятия.

От выбора стратегии управления запасами зависят только четыре первых вида потерь, поэтому именно они включаются в уравнение целевой функции. Таким образом, целевую функцию можно записать в следующем виде:

$$F^j = \sum_{i=1}^{n} (Z_i^{j1} + Z_i^{j2} + Z_i^{j3} + Z_i^{j4}),$$

где Z_i^{j1} — величина транспортных затрат, возникающих в момент i при реализации стратегии управления запасами j;

Z_i^{j2} — величина затрат на хранение, возникающая в момент i при реализации стратегии управления запасами j;

Z_i^{j3} — величина затрат, возникающих в момент i при реализации стратегии управления запасами j, вызванных связыванием оборотных средств;

Z_i^{j4} — величина затрат, возникающих в момент i при реализации стратегии управления запасами j, вызванных наличием дефицита на складе.

Введем следующие положения:

- любая стратегия G^j задается последовательностью значений p_i^j:

$$G^j = (p_1^j, p_2^j, p_3^j, \ldots, p_i^j, \ldots, p_n^j),$$

где p_i^j — объем поставки продукции на предприятие в момент времени i (i=1..*n*), при реализации стратегии *j*;

- текущая величина запаса продукции в момент i при реализации стратегии *j* определяется как:

$$z_i^j = z_{i\text{-}1}^j - Q_{i\text{-}1} + p_i^j.$$

Величина *транспортных затрат* Z_i^{j1} в момент времени *i* определяется как:

$$Z_i^{j1} = vround(p_i^j / V_{tr}) \cdot C_{tr},$$

где *vround* ( ) — функция округления аргумента в большую сторону до целого.

Величина *затрат на хранение* Z_i^{j2} в момент времени *i* определяется как:

$$Z_i^{j2} = z_i^j \; C_{skl}.$$

Величина *затрат, вызванных связыванием оборотных средств* Z_i^{j3} в момент времени *i* определяется как:

$$Z_i^{j3} = z_i^j \; C_{pr} \; U.$$

Величина *затрат, вызванных наличием дефицита на складе* Z_i^{j4} в момент времени *i* определяется как:

$$Z_i^{j_4} = \begin{cases} z_i^j C_{pr} W, \text{если } z_i^j < 0 \\ 0, \text{если } z_i^j \geq 0 \end{cases}.$$

Поскольку все затраты в течение планового периода разнесены во времени, то их необходимо приводить к единому моменту времени (например, к началу планового периода) с учетом дисконт-фактора. Таким образом, если Z_i^j — сумма всех затрат, возникающих в момент времени *i*, то общие затраты за весь плановый период *T* будут подсчитываться согласно:

$$F^j = \sum_{i=1}^{n} d_i Z_i^j,$$

где d_i — величина коэффициента дисконтирования в момент *i*, приводящего сумму затрат Z_i^j к начальному моменту времени:

В развернутом виде целевая функция задачи нахождения оптимальной стратегии для нестационарной детерминированной системы управления запасами будет выглядеть следующим образом:

$$E^{*w}(s_h^{w-1}) = \min_{\{x_{nq}^w\}} E^w(s_h^{w-1}, x_{nq}^w) = E^w(s_h^{w-1}, x_{n1}^w) =$$

$$= (C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W) \sum_{i=h+1}^{i=n} (d_i(s_h^{w-1} - \sum_{r=h}^{r=i-1} Q_r)).$$

$$z_i = z^{\wedge} + \sum_{r=i}^{r=n-1} Q_r - \sum_{r=i+1}^{r=n} p_r$$

Формирование системы ограничений оптимизационной задачи. Все ограничения в задаче об оптимальном управлении запасами можно классифицировать на ограничения:

- поставщика;
- рынка;
- внутренние.

В исследуемой задаче имеют место ограничения поставщика и внутренние ограничения.

Ограничения поставщика.

Объем поставки не может быть меньше минимальной партии, не должен превышать максимальную партию и должен быть кратен стандартной упаковке :

$$P_{\min} \leq p_i^j \leq P_{\max},\ i = 1..n,$$

$$p_i^j = int(p_i^j / P_{st})\ P_{st},$$

где *int*() — функция извлечения целой части аргумента.

Внутренние ограничения:

- уровень запаса не должен превышать вместимость склада, а также не должен опускаться ниже уровня страхового запаса (если рассматривается бездефицитная модель):

$$R_i \leq z_i^j \leq V_{skl},\ i = 1..n;$$

- ограничен минимальный интервал времени между соседними поставками товара:

$$tp_k - tp_{k\text{-}1} \geq I,\ k = 1..h,$$

где tp_k — момент времени поставки k,

$h = dround\ (T\ /\ I)$ — максимальное количество поставок в планируемом периоде (*dround*() — функция округления аргумента до ближайшего меньшего целого).

Таким образом, можно сформулировать математическую постановку задачи оптимального управления запасами:

$$F^j = \sum_{i=1}^{n} d_i(vround(p_i^j / V_{tr})C_{tr} + z_i^j C_{skl} + \\ + z_i^j C_{pr} U + z_i^j C_{pr} W) \rightarrow \min \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} P_{\min} \leq p_i^j \leq P_{\max} \\ p_i^j = \operatorname{int}\left(\dfrac{p_i^j}{P_{st}}\right) \times P_{st} \\ R_i \leq z_i^j \leq V_{skl} \\ tp_k - tp_{k-1} \geq I \\ i = 1..n,\ k = 1..h \end{cases} \tag{4.17}$$

$$z_i^j = z_{i-1}^j - Q_{i-1} + p_i^j, \tag{4.18}$$

(балансовое условие оптимизационной задачи).

Выбор метода решения оптимизационной задачи нахождения оптимальной стратегии. Описанная выше оптимизационная задача является многошаговой (динамической) задачей принятия решений в условиях определенности, поэтому для ее решения будут использоваться методы исследования операций, в частности, метод динамического программирования (как наиболее часто используемый на сегодня метод решения рассматриваемых динамических задач) [1], [2], [3], [5], [6].

Важные особенности метода динамического программирования:

- Функция затрат F^j не обязана быть дифференцируемой и может задаваться таблично или алгоритмически.
- Гарантируется получение глобального минимума, причем наличие локальных минимумов не создает никаких трудностей.
- Дополнительные ограничения только облегчают получение решения, поскольку сужают пространство поиска.
- Используя решения, полученные на предыдущих этапах, можно решить задачу с меньшим числом периодов.
- Метод может быть обобщен на многоресурсные задачи (в частности, с предварительным распределением затрат по уровням).

4.3. Управление материальными запасами для нестационарных детерминированных условий

Метод динамического программирования. Чтобы использовать метод динамического программирования в решении приведенной выше оптимизационной задачи, приведем общую постановку задачи динамического программирования [5].

Рассматривается управляемый процесс, в данном случае процесс нахождения оптимальной стратегии управления запасами. В результате управления система (объект управления) S переводится из начального состояния s_0 в состояние $\hat{s}$. Предположим, что управление можно разбить на w шагов, т. е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему S из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность w пошаговых управлений. Обозначим через x_k управление на k-м шаге ($k = 1, 2, ..., w$). Если управления x_k удовлетворяют некоторым ограничениям решаемой задачи, то такие управления являются допустимыми (x_k может быть числом, точкой в n-мерном пространстве, функцией, значением качественного признака, иным объектом нечисловой природы).

Пусть $X(x_1, x_2, \ldots, x_w)$ — управление, переводящее систему S из состояния s_0 в состояние $\hat{s}$. Обозначим через s_k состояние системы после k-го шага управления ($s_k \in S_k$, где S_k — множество всех возможных состояний на шаге k). Получаем последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_{k\text{-}1}, s_k, \ldots, s_w = \hat{s}$. Пошаговый процесс перехода системы S из состояния s_0 в состояние $\hat{s}$ под действием управления $X(x_1, x_2, \ldots, x_w)$ представлен на рис. 4.12.

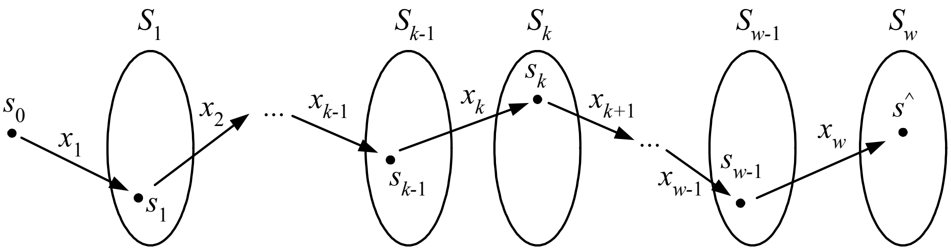

Рис. 4.12. Процесс перехода системы S из состояния s_0 в состояние $\hat{s}$

Для данного процесса действуют следующие положения:

1. Состояние s_k системы в конце k-го шага зависит от предшествующего состояния $s_{k\text{-}1}$ и управления на k-м шаге x_k (и не зависит от предшествующих состояний и управлений). Это требование называется «отсутствием последствия». Сформулированное положение записывается в виде уравнений:

$$s_k = \varphi_k(s_{k\text{-}1}, x_k),\ k = 1, 2, \ldots, w, \qquad (4.19)$$

которые называются *уравнениями состояний.*

2. Эффективность каждого k-го шага также зависит от предшествующего состояния $s_{k\text{-}1}$ и управления на k-м шаге x_k. Обозначим эффективность k-го шага через

$$E_k = f_k(s_{k\text{-}1}, x_k),\ k = 1, 2, \ldots, w,$$

тогда эффективность всего управления $X(x_1, x_2, \ldots, x_w)$ определяется как

$$E = \sum_{k=1}^{w} f_k(s_{k-1}, x_k). \qquad (4.20)$$

Задача пошаговой оптимизации (задача динамического программирования) формулируется следующим образом: *определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из состояния s_0 в состояние $\hat{s}$, при котором целевая функция (6.20) принимает наибольшее (наименьшее) значение.*

Решение поставленной задачи с помощью метода динамического программирования заключается в последовательной минимизации целевой функции за 1, 2 и т. д. интервала на основе принципа оптимальности Р. Беллмана: *каково бы ни было состояние s системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.*

Рассмотрим последовательно определение оптимального управления на шаге w, w–1 и т. д., используя принцип оптимальности Р. Беллмана.

Рассмотрим w-й шаг:

$s_{w\text{-}1}$ — состояние системы к началу w-го шага ($s_{w\text{-}1} \in S_{w\text{-}1}$);

$s_w = \hat{s}$ — конечное состояние системы;

x_w — управление на w-м шаге;

$f_w(s_{w\text{-}1}, x_w)$ — целевая функция (выигрыш) w-го шага.

Согласно принципу оптимальности, x_w нужно выбирать так, чтобы для любых состояний $s_{w\text{-}1}$ получить максимум целевой функции на этом шаге. Обозначим через $E^*{}_w(s_{w\text{-}1})$ максимум целевой функции — показателя эффективности w-го шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии $s_{w\text{-}1}$, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$E^*{}_w(s_{w\text{-}1})$ называется *условным максимумом целевой функции на w-м шаге*:

$$E_w^*(s_{w-1}) = \max_{\{x_w\}} f_w(s_{w-1}, x_w). \qquad (6.21)$$

Максимизация ведется по всем допустимым управлениям x_{w}.

Решение x_w, при котором достигается $E^*{}_w(s_{w\text{-}1})$, также зависит от $s_{w\text{-}1}$ и называется *условным оптимальным управлением на w-м шаге* и обозначается $x^*{}_w(s_{w\text{-}1})$.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации по уравнению (4.21) для всех возможных состояний $s_{w\text{-}1}$, находятся две функции: $E^*{}_w(s_{w\text{-}1})$ и $x^*{}_w(s_{w\text{-}1})$.

Рассмотрим теперь двухшаговую задачу: присоединим к w-му шагу (w-1)-й.

Для любых состояний $s_{w\text{-}2}$, произвольных управлений $x_{w\text{-}1}$ и оптимальном управлении на w-м шаге значение целевой функции на двух последних шагах:

$$f_{\mathrm{w}\text{-}1}(s_{w\text{-}2}, x_{w\text{-}1}) + E^*{}_w(s_{w\text{-}1}). \qquad (4.22)$$

Согласно принципу оптимальности для любых $s_{w\text{-}2}$ решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем (w-м) шаге приводило бы к максимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, необходимо найти максимум выражения (4.22) по всем допустимым управлениям $x_{w\text{-}1}$. Максимум этой суммы зависит от $s_{w\text{-}2}$, обозначается через $E^*{}_{w\text{-}1}(s_{w\text{-}2})$ и называется условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах. Соответствующее управление $x_{w\text{-}1}$ на (w-1)-м шаге обозначается через $x^*{}_{w\text{-}1}(s_{w\text{-}2})$ и называется условным оптимальным управлением на (w-1)-м шаге.

$$E_{w-1}^*(s_{w-2}) = \max_{\{x_{w-1}\}}\{f_{w-1}(s_{w-2}, x_{w-1}) + E_w^*(s_{w-1})\}. \qquad (4.23)$$

С учетом уравнения состояния $s_{w\text{-}1} = \varphi_{w\text{-}1}(s_{w\text{-}2}, x_{w\text{-}1})$ значение целевой функции зависит только от $s_{w\text{-}2}$ и $x_{w\text{-}1}$. В результате максимизации только по одной переменной $x_{w\text{-}1}$ согласно уравнению (4.23) вновь получаем две функции: $E^*{}_{w\text{-}1}(s_{w\text{-}2})$ и $x^*{}_{w\text{-}1}(s_{w\text{-}2})$.

Далее рассматривается трехшаговая задача: к двум последним шагам присоединяется (w-2)-й и т. д.

Рассмотрим общий случай определения оптимального управления на шаге k (k = 1, 2, …, w). Обозначим через $E^*{}_k(s_{k\text{-}1})$ условный максимум целевой функции, полученный при оптимальном управлении на w-k+1 шагах, начиная с k-го до конца, при условии, что к началу k-го шага система находилась в состоянии $s_{k\text{-}1}$. Фактически эта функция равна:

$$E_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{(x_k,\dots,x_w)\}} \sum_{i=k}^{w} f_i(s_{i-1}, x_i).$$

В свою очередь

$$E^*_{k+1}(s_k) = \max_{\{(x_{k+1},\ldots,x_w)\}} \sum_{i=k+1}^{w} f_i(s_{i-1}, x_i).$$

С другой стороны, целевая функция на w-k последних шагах (рис. 4.13) при произвольном управлении x_k на k-м шаге и оптимальном управлении на последующих шагах равна

$$f_k(s_{k-1}, x_k) + E^*_{k+1}(s_k).$$

Согласно принципу оптимальности, x_k выбирается из условия максимума этой суммы, т. е.

$$E^*_k(s_{k-1}) = \max_{\{x_k\}}\{f_k(s_{k-1}, x_k) + E^*_{k+1}(s_k)\}, \qquad (6.24)$$

где $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, w$-1.

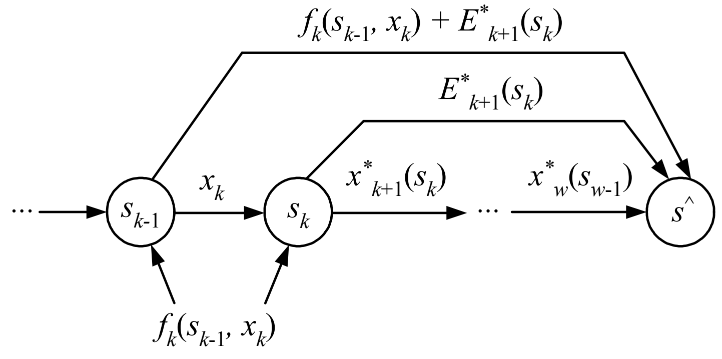

Рис. 4.13. Процесс управления системой S на последних w-k шагах

Таким образом, определив из (4.21) значения $E^*_w(s_{w-1})$ и $x^*_w(s_{w-1})$, а из (4.24) и уравнений состояний (4.19) значения $E^*_k(s_{k-1})$ и соответствующие $x^*_k(s_{k-1})$ получим последовательности:

$$E^*_w(s_{w-1}),\ E^*_{w-1}(s_{w-2}),\ \ldots,\ E^*_2(s_1),\ E^*_1(s_0) -$$

условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних, на …w последних шагах и

$$x^*_w(s_{w-1}),\ x^*_{w-1}(s_{w-2}),\ \ldots,\ x^*_2(s_1), x^*_1(s_0) -$$

условные оптимальные управления на w-м, (w-1)-м, …, 1-м шагах.

Используя эти последовательности, можно найти решение задачи при данных w и s_0. При фиксированном s_0 получаем $x^*_1 = x^*_1(s_0)$. Далее из (4.19) определяется $s^*_1 = \varphi_1(s_0, x^*_1)$ и т. д.:

$$x^*_1 = x^*_1(s_0) \to s^*_1 = \varphi_1(s_0, x^*_1) \to x^*_2 = x^*_2(s^*_1) \to s^*_2 = \varphi_2(s^*_1, x^*_2) \to x^*_3 = x^*_3(s^*_2) \to \ldots$$
$$\to s^*_{w-1} = \varphi_{w-1}(s^*_{w-2}, x^*_{w-1}) \to x^*_w = x^*_w(s^*_{w-1}).$$

Таким образом, получаем оптимальное решение задачи:

$$X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_w).$$

Постановка задачи определения оптимальной стратегии нестационарной детерминированной системы управления запасами для решения методом динамического программирования. Чтобы разработать алгоритм решения поставленной в разделе 4.2 оптимизационной задачи, опишем ее в терминах динамического программирования. Объектом управления в данном случае является рассмотренная выше система управления запасами. Управление системой разбивается на w пошаговых управлений ($w = h + 1 = vround\,(T\,/\,I)$ — максимальное количество возможных поставок в течение периода планирования T, увеличенное на единицу).

Управление x^k, переводящее систему S из состояния $s_{k\text{-}1}$ в состояние s_k, представляет собой величину и момент времени k-й поставки.

В общем случае величина поставки продукции на склад может принимать множество значений P:

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_q, \ldots, p_v\},$$

где p_q — объем q-го варианта поставки продукции.

Возможные варианты размеров поставок продукции могут быть определены исходя из ограничений (4.17):

$$p_q = \begin{cases} 0, \text{ если } q = 1; \\ P_{\min} + P_{st} \cdot (q-2), \text{ если } q = 2..v. \end{cases} \tag{4.25}$$

Общее количество вариантов поставки $v = (P_{\max} - P_{\min}) \,/\, P_{st} + 2$.

Каждая поставка p_q может быть произведена в любой момент времени i (в общем случае $i = 1..n$).

Таким образом, множество возможных управлений X^k на шаге k можно представить в виде следующей матрицы порядка $n \times v$:

$$X^k = \begin{Bmatrix} x_{11}^k & x_{21}^k & \ldots & x_{i1}^k & \ldots & x_{n1}^k \\ x_{12}^k & x_{22}^k & \ldots & x_{i2}^k & \ldots & x_{n2}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1q}^k & x_{2q}^k & \ldots & x_{iq}^k & \ldots & x_{nq}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1v}^k & x_{2v}^k & \ldots & x_{iv}^k & \ldots & x_{nv}^k \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{i1} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{i2} & \cdots & p_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{1q} & p_{2q} & \cdots & p_{iq} & \cdots & p_{nq} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{1v} & p_{2v} & \cdots & p_{iv} & \cdots & p_{nv} \end{Bmatrix}$$

Управление x^k_{iq} представляет собой поставку объемом p_q в момент времени i на шаге k.

Каждое управление x^k_{iq} переводит систему в соответствующее состояние $s^k \in S^k$, поэтому размерность множества состояний S^k такая же, как и размерность множества возможных управлений X^k: $n \cdot v$. Множество возможных состояний S^k можно представить в виде следующей матрицы:

$$S^k = \left\{ \begin{matrix} s^k_{11} & s^k_{21} & \dots & s^k_{i1} & \dots & s^k_{n1} \\ s^k_{12} & s^k_{22} & \dots & s^k_{i2} & \dots & s^k_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^k_{1q} & s^k_{2q} & \dots & s^k_{iq} & \dots & s^k_{nq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^k_{1v} & s^k_{2v} & \dots & s^k_{iv} & \dots & s^k_{nv} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z^k_{11} & z^k_{21} & \dots & z^k_{i1} & \dots & z^k_{n1} \\ z^k_{12} & z^k_{22} & \dots & z^k_{i2} & \dots & z^k_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^k_{1q} & z^k_{2q} & \dots & z^k_{iq} & \dots & z^k_{nq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^k_{1v} & z^k_{2v} & \dots & z^k_{iv} & \dots & z^k_{nv} \end{matrix} \right\}.$$

Каждое состояние s^k_{iq} представляет собой величину запаса z^k_{iq} в момент времени i после поставки x^k_{iq}.

Получим уравнение состояний для данной задачи. Из балансового уравнения (2.5) $z_i^j = z_{i-1}{}^j - Q_{i-1} + p_i{}^j$ следует:

$$z_{i-1} = z_i + Q_{i-1} - p_i. \tag{4.26}$$

Из условия задачи в конце планового периода в момент времени n система должна находиться в состоянии $s^{\wedge} = z^{\wedge}$. Тогда из (4.26) следует:

$$z_{n-1} = z^{\wedge} + Q_{n-1} - p_n;$$

$$z_{n-2} = z_{n-1} + Q_{n-2} - p_{n-1} = z^{\wedge} + Q_{n-1} - p_n + Q_{n-2} - p_{n-1};$$

$$z_{n-3} = z_{n-2} + Q_{n-3} - p_{n-2} = z^{\wedge} + Q_{n-1} - p_n + Q_{n-2} - p_{n-1} + Q_{n-3} - p_{n-2} \text{ и т. д.}$$

В общем случае получим:

$$z_i = z^{\wedge} + \sum_{r=i}^{r=n-1} Q_r - \sum_{r=i+1}^{r=n} p_r. \tag{4.27}$$

Предположим, что под воздействием управления x^k_{cq} система переходит из состояния $s^{k\text{-}1}_b$ в состояние s^k_c $(b < c)$,

где $s^{k\text{-}1}_b = z^{k\text{-}1}_b$ — уровень запаса в системе в момент времени b после (k-1)-й поставки;

$s^k_c = z^k_c$ — уровень запаса в системе в момент времени с после k-й поставки.

Из (6.27) следует:

$$s_b^{k-1} = z_b = z^{\wedge} + \sum_{r=b}^{r=n-1} Q_r - \sum_{r=b+1}^{r=n} p_r;$$

$$s_c^{k} = z_c = z^{\wedge} + \sum_{r=c}^{r=n-1} Q_r - \sum_{r=c+1}^{r=n} p_r.$$

Преобразовав систему этих двух уравнений, получим:

$$s_c^{k} = s_b^{k-1} + \sum_{r=c}^{r=n-1} Q_r - \sum_{r=b}^{r=n-1} Q_r - \sum_{r=c+1}^{r=n} p_r + \sum_{r=b+1}^{r=n} p_r =$$

$$= s_b^{k-1} - \sum_{r=b}^{r=c-1} Q_r + \sum_{r=b+1}^{r=c} p_r. \qquad (4.28)$$

Последняя сумма в данном выражении — сумма поставок с момента (b+1) до момента c и равна $x^k{}_{cq}$, следовательно:

$$s_c^{k} = s_b^{k-1} - \sum_{r=b}^{r=n-1} Q_r + x_{cq}^{k}.$$

Уравнение (4.28) — это уравнение состояний для решаемой задачи.

Выразим эффективность k-го шага, которая зависит от предшествующего состояния $s^{k-1}{}_b$ и управления на k-м шаге $x^k{}_{cq}$, переводящего систему в состояние $s^k{}_c$. Эффективность k-го шага выражается из (4.16) и равна величине совокупных затрат, возникающих на шаге k:

$$\begin{aligned} E^k &= \sum_{i=b+1}^{i=c} d_i (vround(\frac{p_i}{V_{tr}})C_{tr} + z_i C_{skl} + z_i C_{pr}U + z_i C_{pr}W) = \\ &= C_{tr} \sum_{i=b+1}^{i=c} d_i vround(\frac{p_i}{V_{tr}}) + (C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W) \sum_{i=b+1}^{i=c} d_i z_i \end{aligned} \qquad (4.29)$$

Первое слагаемое в выражении (4.29) представляет собой стоимость транспортировки товара, поставленного на склад с момента времени (b+1) до момента времени c, приведенную к началу отчетного периода с учетом дисконт-фактора d. Поскольку на шаге k при управлении $x^k{}_{cq}$ производится всего лишь одна поставка товара в момент времени с в размере p_{cq}, то:

$$C_{tr} \sum_{i=b+1}^{i=c} d_i vround\left(\frac{p_i}{V_{tr}}\right) = C_{tr} d_c vround\left(\frac{x_{cq}^k}{V_{tr}}\right) \qquad (4.30)$$

Преобразуем второе слагаемое выражения (4.29):

$$\sum_{i=b+1}^{i=c} d_i z_i = d_{b+1} z_{b+1} + \ldots + d_{c-1} z_{c-1} + d_c z_c.$$

Поскольку за период времени c (b+1) по (c-1) запас не пополняется, а только расходуется, то из (4.18) получим:

$z_{b+1} = z_b - Q_b$; $z_{b+2} = z_{b+1} - Q_{b+1} = z_b - Q_b - Q_{b+1}$ и т. д.

Таким образом, при (b+1) < i < (c-1) величину запаса в момент i можно выразить как:

$$z_i = z_b - \sum_{r=b}^{r=i-1} Q_r ; (b+1) < i < (c-1).$$

В момент времени c производится поставка продукции в размере x^k_{cq}=p_{cq}, поэтому из (4.18) имеем:

$$z_c = z_{c-1} - Q_{c-1} + p_c = z_b - \sum_{r=b}^{r=c-1} Q_r + x^k_{cq}.$$

Таким образом, второе слагаемое в выражении (4.29) можно записать как:

$$\begin{aligned}&(C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W)\sum_{i=b+1}^{i=c} d_i z_i = \\ &= (C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W)\ (\sum_{i=b+1}^{i=c}(d_i(z_b - \sum_{r=b}^{r=i-1} Q_r)) + d_c x^k_{cq}).\end{aligned} \quad (4.31)$$

Подставив (4.30) и (4.31) в (4.29), получим:

$$\begin{aligned}&E^k = C_{tr} d_c vround\left(\frac{x^k_{cq}}{V_{tr}}\right) + \\ &+ \left(C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W\right)\left(\sum_{i=b+1}^{i=c}\left(d_i\left(z_b - \sum_{r=b}^{r=i-1} Q_r\right)\right) + d_c x^k_{cq}\right).\end{aligned} \quad (4.32)$$

Величина E^k в (6.32) — эффективность k-го шага, а именно величину совокупных затрат на создание и пополнение запаса с момента (b + 1) (начало шага k) и до момента с (конец шага k), если в момент b система находилась в состоянии $s^{k\text{-}1}_b = z_b$, и затем было выбрано управление x^k_{cq}.

Просуммировав E^k для каждого шага k = 1..w, получим величину совокупных затрат на создание и пополнение запаса в течение планового периода T:

$$E = \sum_{k=1}^{k=w} E^k. \quad (4.33)$$

Таким образом, необходимо решить следующую задачу: *определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из состояния* s_0 *в состояние* $\hat{s}$*, при котором целевая функция (4.33) принимает наименьшее значение.*

Определение оптимальной стратегии нестационарной детерминированной системы управления запасами методом динамического программирования. Опишем решение поставленной задачи методом динамического программирования в соответствии со схемой, приведенной выше.

Рассмотрим последовательно определение оптимального управления на шаге w, w-1 и т. д., используя принцип оптимальности Р. Беллмана.

Рассмотрим w-ый шаг:

$s^{w\text{-}1}_h$ — состояние системы к началу w-го шага ($s^{w\text{-}1}_h \in S^{w\text{-}1}$);

$s^w_n = \hat{s}_n$ — конечное состояние системы;

x^w_{nq} — управление на w-м шаге;

Следует отметить, что если шаги k = 1..w-1 могут заканчиваться какой-либо поставкой, то шаг w представляет собой только расходование запаса до уровня $\hat{z}_n = \hat{s}_n$ без по-следующей поставки в момент времени n, т. е. $x^{w}{}_{nq} = x^{w}{}_{n1} = p_{n1} = 0$. Динамика изменения величины запаса z в течение периода планирования T представлена на рис. 4.14.

Множество возможных состояний на (w-1)-м шаге $s^{w\text{-}1}{}_{h}$ можно получить из уравнений состояний (4.28):

$$s_n^w = s^{\wedge} = s_h^{w-1} - \sum_{r=h}^{r=n-1} Q_r + x_{n1}^w = s_h^{w-1} - \sum_{r=h}^{r=n-1} Q_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_h^{w-1} = s^{\wedge} + \sum_{r=h}^{r=n-1} Q_r, 1 \le h \le (n-1).$$

Целевую функцию (величину затрат на хранение и поддержание запаса) в течение w-го шага получаем из (4.32):

$$E^w = \left(C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W\right) \sum_{i=h+1}^{i=n} \left(d_i \left(s_h^{w-1} - \sum_{r=h}^{r=i-1} Q_r \right)\right). \tag{4.34}$$

Поскольку $x^{w}{}_{nq} = x^{w}{}_{n1}$, то $E^{w}(s^{w\text{-}1}{}_{h})$ не зависит от $x^{w}{}_{nq}$, следовательно условный минимум целевой функции на w-м шаге:

$$\begin{aligned} E^{*w}(s_h^{w-1}) &= \min_{\{x_{nq}^w\}} E^w(s_h^{w-1}, x_{nq}^w) = E^w(s_h^{w-1}, x_{n1}^w) = \\ &= (C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W) \sum_{i=h+1}^{i=n} (d_i (s_h^{w-1} - \sum_{r=h}^{r=i-1} Q_r)). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Рассчитав $E^{*w}(s^{w\text{-}1}{}_{h})$ для всех возможных $s^{w\text{-}1}{}_{h}$, получим функцию оптимальных затрат на w-м шаге при условии действия управления $x^{w}{}_{n1}$.

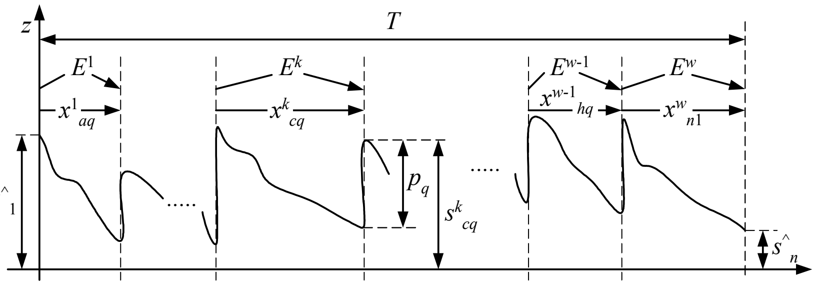

Рис. 4.14. Изменение величины запаса z в течение периода T

Рассмотрим шаг (w-1). Множество возможных состояний $s^{w\text{-}2}{}_{g}$ получаем из уравнений состояний (4.28):

$$\begin{aligned} &s_h^{w-1} = s_g^{w-2} - \sum_{r=g}^{r=h-1} Q_r + x_{hq}^{w-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_g^{w-2} = s_h^{w-1} + \sum_{r=g}^{r=h-1} Q_r - x_{hq}^{w-1}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

где $s^{w\text{-}1}{}_{h} \in S^{w\text{-}1}$, $x^{w\text{-}1}{}_{hq} \in X^{w\text{-}1}$, $1 \le g \le (h\text{-}1)$, $1 \le q \le v$.

Для любых возможных состояний s^{w-2}_{g} и возможных управлений x^{w-1}_{hq} из (6.23) получаем:

$$E^{*w-1}(s_g^{w-2}) = \min_{\{x_{hq}^{w-1}\}}\{E^{w-1}(s_g^{w-2}, x_{hq}^{w-1}) + E^{*w}(s_h^{w-1})\}. \qquad (4.37)$$

С учетом уравнения состояния (4.36) $E^{*w-1}(s^{w-2}_{g})$ зависит только от s^{w-2}_{g} и x^{w-1}_{hq}. В результате минимизации только по одной переменной x^{w-1}_{hq} согласно уравнению (4.37) получим две функции: $E^{*w-1}(s^{w-2}_{g})$ и $x^{*w-1}_{hq}(s^{w-2}_{g})$.

Далее рассматривается трехшаговая задача: к двум последним шагам присоединяется (w-2)-й и т. д.

Рассмотрим общий случай определения оптимального управления на шаге k (k = 1, 2, …, w). Множество возможных состояний s^{k-1}_{b} в начале шага k определяется из (4.28):

$$s_b^{k-1} = s_c^k + \sum_{r=b}^{r=c-1} Q_r - x_{cq}^k, s_c^k \in S^k, x_{cq}^k \in X^k. \qquad (4.38)$$

Минимум целевой функции на (w-k) шагах при условии, что перед k-м шагом система находилась в состоянии s^{k-1}_{b}, определяется как:

$$E^{*k}(s_b^{k-1}) = \min_{\{x_{cq}^k\}}\{E^k(s_b^{k-1}, x_{cq}^k) + E^{*k+1}(s_c^k)\}, \qquad (4.39)$$

где

$$s_c^k = s_b^{k-1} - \sum_{r=b}^{r=c-1} Q_r + x_{cq}^k, s_b^{k-1} \in S^{k-1}, x_{cq}^k \in X^k. \qquad (4.40)$$

Таким образом, определив из (4.35) значения $E^{*w}(s^{w-1}_{h})$ для всех допустимых s^{w-1}_{h} при условии действия управления x^{w}_{n1}, а из (4.39) и уравнений состояний (4.40) значения $E^{*k}(s^{k-1}_{b})$ и соответствующие $x^{*k}_{cq}(s^{k-1}_{b})$, получим последовательности:

$$E^{*w}(s^{w-1}_{h}),\ E^{*w-1}(s^{w-2}_{g}),\ \ldots,\ E^{*k+1}(s^{k}_{c}),\ E^{*k}(s^{k-1}_{b}),\ \ldots,\ E^{*2}(s^{1}_{a}),\ E^{*1}(s^{0}_{1}) \text{ —}$$

условные минимумы целевой функции на последнем, на двух последних, на …w последних шагах и

$$x^{w}_{n1},\ x^{*w-1}_{hq}(s^{w-2}_{g}),\ \ldots,\ x^{*k}_{cq}(s^{k-1}_{b}),\ \ldots,\ x^{*1}_{aq}(s^{0}_{1}) \text{ —}$$

условные оптимальные управления на w-м, (w-1)-м, …, 1-м шагах.

Используя эти последовательности, находим решение задачи. При фиксированном $s^{0}_{1} = \hat{s}_{1}$ получаем $x^{*1}_{aq} = x^{*1}_{aq}(\hat{s}_{1})$.

Если $\hat{s}_{1}$ представляет собой множество, т. е. $\hat{s}_{1} \in \hat{S}_{1}$, то $x^{*1}_{aq} = x^{*1}_{aq}(s^{*\wedge}_{1})$, где состояние $s^{*\wedge}_{1}$, такое, что:

$$E^{*1}(s_1^{*\wedge}) = \min_{s_1^0 \in S_1^{\wedge}}(E^{*1}(s_1^0)).$$

Далее из (4.40) определяем $s^{*1}_{a} = \varphi_{1}(\hat{s}_{1}, x^{*1}_{aq})$ и т. д.:

$$x^{*1}_{aq} = x^{*1}_{aq}(\hat{s}_{1}) \to s^{*1}_{a} = \varphi_{1}(\hat{s}_{1}, x^{*1}_{aq}) \to \ldots$$

$$\to s^{*w-1}_{h} = \varphi_{w-1}(s^{*w-2}_{g}, x^{*w-1}_{hq}) \to x^{*w}_{nq} = x^{*w}_{nq}(s^{*w-1}_{h}).$$

Таким образом, получаем оптимальную стратегию:

$$X^{*}=(x^{*1}{}_{aq},\ \ldots,\ x^{*k\text{-}1}{}_{bq},\ x^{*k}{}_{cq},\ \ldots,\ x^{*w}{}_{nq}),$$

где $x^{*k}{}_{cq}$ определяет величину p_q и момент времени с поставки k в оптимальной стратегии управления запасами X^{*} для поставленной задачи.

Поставленная задача имеет ряд ограничений на размер поставки, на величину текущего запаса, на минимальный интервал времени между соседними поставками.

Ограничения на размер поставки учтены в уравнении для допустимых величин поставки (4.25).

Ограничения на величину текущего запаса, минимальный интервал времени между поставками учитываются при определении множеств допустимых состояний S^{k} на каждом шаге $k = 1..w$.

Расчетное множество состояний на шаге (k-1) определяется из (4.38) на основе множества допустимых состояний S^{k} на шаге k и множества допустимых управлений X^{k} на шаге k. Каждое состояние на шаге (k-1) $s^{k\text{-}1}{}_{b}$ характеризуется моментом времени b и расчетным уровнем запаса z в этот момент времени.

Учет ограничений на величину запаса проводится путем отсеивания тех расчетных состояний $s^{k\text{-}1}{}_{b}$, при которых уровень запаса z не соответствует указанным ограничениям.

Учет ограничения на минимальный интервал времени между соседними поставками проводится путем отсеивания тех расчетных состояний $s^{k\text{-}1}{}_{b} = \varphi\,(s^{k}{}_{c}, x^{k}{}_{c})$, для которых $(c - b) \leq I$.

Таким образом, множество допустимых состояний на шаге (k-1) с учетом всех ограничений можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} s_b^{k-1} \in S^{k-1} \text{ при условии, что } R_b \leq s_b^{k-1} \leq V_{skl} \text{ и } (c-b) \leq I \\ s_b^{k-1} \notin S^{k-1} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Определение множества допустимых состояний осуществляется на каждом шаге $k = 1..w$.

На рисунке 4.15 представлена блок-схема алгоритма решения задачи нахождения оптимальной стратегии управления запасами для нестационарной детерминированной системы.

Разработка организационно-экономической системы управления материальными запасами ПСС для нестационарных детерминированных условий. Организационно-экономическая система управления материальными запасами производственно-сбытовой системы для нестационарных детерминированных условий включает:

- организационно-функциональную структуру системы;
- экономико-математическую модель определения оптимальной стратегии управления запасами;
- принципиальную схему функционирования подразделений логистики предприятия при определении и реализации оптимальной стратегии управления запасами.

Организационно-функциональная структура системы.

Система управления материальными запасами для нестационарных детерминированных условий создается на основе организационно-функциональной структуры предприятия. Под организационно-функциональной структурой понимается организация связей и отношений между подразделениями предприятия, а также состав этих подразделений, каждому из которых обычно соответствует определенная функция.

Типовая организационно-функциональная структура предприятия, выпускающего различные виды продукции, представлена на рис. 4.16 [9]. Функции управления материальными потоками сосредоточены в логистической системе (ЛС) предприятия. На рис. 4.16 функции ЛС приведены в укрупненном виде.

Более подробно функции ЛС приводятся на рис. 4.17 [17].

Все функции логистической системы предприятия можно разделить на две группы: ключевые и поддерживающие.

В качестве ключевых функций ЛС рассматриваются:

- поддержание стандартов обслуживания потребителей (Customer service standarts);
- управление закупками (Procurement), закупки (Purchasing);
- транспортировка (Transportation);
- управление запасами (Inventory management);
- управление процедурами заказов (Order processing);
- управление производственными процедурами (операциями) (Operation management);
- ценообразование (Pricing);
- физическое распределение (Physical Distribution).

Под *поддержанием стандартов обслуживания потребителей* понимается поддержание заданного уровня качества продукции, дистрибуции товаров и послепродажного обслуживания. Логистические решения играют определяющую роль по доставке товара и сервиса требуемого качества в заданное время.

Организация и *управление закупками* в фирме включают в себя комплекс таких задач, как выбор поставщиков *материальных ресурсов* (МР), планирование потребности в МР, определение рациональных периодов времени и объемов поставок ресурсов, организация договорной работы, выбор форм поставок и типов транспорта для доставки МР к производственным подразделениям и т. п.

Транспортировка является одной из ключевых функций ЛС. Это объясняется тем, что без транспортировки практически не существует материального потока. Процесс транспортировки рассматривается как совокупность перевозки, погрузки-разгрузки, экспедирования и других сопутствующих логистических операций.

Управление запасами МР и *готовой продукции* (ГП) представляет собой процесс создания, контроля и регулирования уровней запасов в снабжении, производстве и сбыте продукции.

Функция *управления (обработки) заказами* определяет процедуры получения и обработки заказов, моменты времени получения ГП или оказания услуги потребителю, а также инициирует работу фирменной дистрибутивной сети или логистических посредников по доставке и продаже ГП потребителям.

Управление производственными процедурами, или операционный менеджмент, решает логистические задачи объемно-календарного планирования, минимизации уровней запасов МР и *незавершенного производства* (НП) в производстве, прогнозирования потребности в МР, сокращения длительности производственного цикла и т. п.


Начало
Формирование исходных данных (стационарных и нестационарных параметров)
$T, Q_i, R_i, C_{pr}, P_{\min}, P_{\max}, P_{st}, I, V_{tr}, C_{tr}, V_{skl}, C_{skl}, U, W, I = 1..n, \hat{s}_1, \hat{s}_n$
Постановка задачи динамического программирования
Определение множества возможных управлений на каждом шаге k: $X^k = \left\{x_{iq}^k\right\}$, $k = 1..w$, $i = 1..n$, $q = 1..v$
$x_{iq}^k = p_{iq}$, где $p_{iq} = \begin{cases} 0, \text{ если } q = 1; \\ P_{\min} + P_{st}^*(q-2), \text{ если } q = 2..v \end{cases}$
Определение правила нахождений множества возможных состояний $S^{k\text{-}1}$ на основе имеющихся ограничений и уравнения состояний для каждого шага $k = 1..w$:
$\begin{cases} s_b^{k-1} \in S^{k-1} \text{ при условии, что } R_b \le s_b^{k-1} \le V_{skl} \text{ и } (c-b) \ge 1 \\ s_b^{k-1} \notin S^{k-1} \text{ в противном случае.} \end{cases}$
где $s_b^{k-1} = s_c^k + \sum\limits_{r=b}^{r=c-1} Q_r - x_{cq}^k, s_c^k \in S^k, x_{cq}^k \in X^k$ — уравнение состояний для данной задачи.
Определение уравнения эффективности шага k:
$E^k = C_{tr} d_c vround(\frac{x_{cq}^k}{V_{tr}}) + (C_{skl} + C_{pr}U + C_{pr}W) \times$
$\times(\sum\limits_{i=b+1}^{i=c} (d_i(z_b - \sum\limits_{r=b}^{r=i-1} Q_r)) + d_c x_{cq}^k).$
1

Шаг *w*

Принимаем множество возможных управлений на шаге *w*: $X^k = x_{n1}^w$.

Определяем множество возможных состояний $s_h^{w-1} \in S^{w-1}$ перед шагом *w* при $X^k = x_{n1}^w$ с помощью уравнения состояний:

$$\begin{cases} s_h^{w-1} \in S^{w-1} \text{ при условии, что } R_h \le s_h^{w-1} \le V_{skl} \\ s_h^{w-1} \notin S^{w-1} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

где $s_h^{w-1} = s^{\wedge} + \sum\limits_{r=h}^{r=n-1} Q_r, 1 < h < (n-1).$

Для всех $s_h^{w-1} \in S^{w-1}$ при условии действия управления x_{n1}^w определяем оптимальное значение целевой функции:

$$E^{*w}(s_h^{w-1}) = (C_{skl} + C_{pr} \cdot U + C_{pr} \cdot W) \cdot \sum_{i=h+1}^{i=n} (d_i \cdot (s_h^{w-1} - \sum_{r=h}^{r=i-1} Q_r)).$$

Шаг $k = (w$-$1)..1$

Принимаем множество возможных управлений на шаге k:
$x^k = \left\{ x_{iq}^w \right\}$, $i = 1..n$, $q = 1..v$.

Определяем возможное множество состояний $s_b^{k-1} \in S^{k-1}$ перед шагом (*k*-1) с помощью уравнения состояний с учетом действия ограничений:

$$\begin{cases} s_b^{k-1} \in S^{k-1} \text{ при условии, что } R_b \le s_b^{k-1} \le V_{skl} \text{ и } (c-b) \ge I \\ s_b^{k-1} \notin S^{k-1} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

где $s_b^{k-1} = s_c^k + \sum\limits_{r=b}^{r=c-1} Q_r - x_{cq}^k, s_c^k \in S^k, x_{cq}^k \in X^k.$

Определение оптимального значения целевой функции на последних (*w* - *k* + 1) шагах при условии, что перед *k*-м шагом система находилась в состоянии s_b^{k-1}:

$$E^{*k}(s_b^{k-1}) = \min_{\{x_{cq}^k\}} \{E^k(s_b^{k-1}, x_{cq}^k) + E^{*k+1}(s_c^k)\},$$

где $s_c^k = s_b^{k-1} - \sum\limits_{r=b}^{r=c-1} Q_r + x_{cq}^k, s_b^{k-1} \in S^{k-1}, x_{cq}^k \in X^k.$

$x_{cq}^{*k}\left(s_b^{k-1}\right)$ — значение управления на шаге *k*, при котором достигается $E^{*k}\left(s_b^{k-1}\right)$, если перед шагом *k* система находилась в состоянии $s^{k\text{-}1}{}_b$.

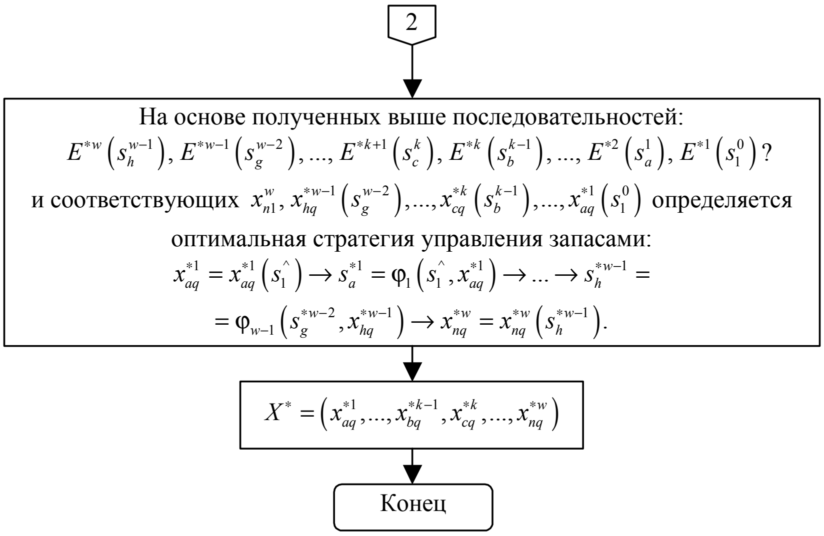

Рис. 4.15. Блок-схема алгоритма нахождения оптимальной стратегии управления запасами для нестационарной детерминированной системы

В рамках функции *ценообразование* формируется стратегия ценообразования предприятия. Стратегия ценообразования тесно связана с маркетинговой и логистической стратегиями компании. Логистическая стратегия задает уровень общих логистических издержек, составляющих базу цены ГП, а от маркетинговой стратегии зависит планируемый уровень рентабельности и окончательная цена продажи ГП потребителю, определяемая конъюнктурой рынка, уровнями цен конкурентов и прогнозами спроса.

Группа поддерживающих функций ЛС направлена на обеспечение надлежащего выполнения ключевых функций. К поддерживающим функциям относятся:

- складирование (Warehousing);
- грузопереработка (Material handling);
- защитная упаковка (Protective packaging);
- поддержка возврата товаров (Return goods handling);
- обеспечение запасными частями и сервисом (Parts and service support);
- сбор возвратных отходов (Salvage and scrap disposal);
- информационно-компьютерная поддержка (Information and computer maintenance).

Складирование — логистическая функция управления пространственным размещением запасов и предусматривает выполнение таких задач, как определение количества, типов и дислокации складов; объема (площади) хранения МР, ГП; планировки размещения запасов; проектирования зон транспортировки, сортировки, погрузки-разгрузки; выбор погрузочно-разгрузочного и другого складского оборудования и т. п.

Грузопереработка (обработка грузов) обычно осуществляется параллельно со складированием, обеспечивает функцию поддержания запасов; включает в себя функции перемещения МР или ГП на складе, размещения продукции на складских стеллажах; организацию процедур сортировки, консолидации или комплектования грузов для выполнения заказов и транспортировки и т. п.

Рис. 4.16. Организационно-функциональная структура предприятия, выпускающего различные виды продукции

В процессах дистрибуции готовой продукции важная роль принадлежит *защитной упаковке*, обеспечивающей сохранность грузов, доставляемых потребителям различными видами транспорта. Кроме того, упаковка имеет большое значение в маркетинге, так как от ее вида и привлекательности в сильной степени зависит потребительский спрос. Применение в физическом распределении стандартных типоразмерных рядов тары и упаковки позволяет значительно снизить логистические издержки за счет согласования объемных модулей тары и упаковки с грузовместимостью транспортных средств, а также технологическими параметрами складских помещений и грузоперерабатывающего оборудования.

К функциям ЛС относятся различные процедуры сбора и *возврата товаров*, которые по каким-то причинам не удовлетворяют покупателей или не прошли гарантийного срока службы. Наряду с организацией *сервисного обслуживания, ремонта ГП и обеспечения потребителей запасными частями* процедуры возврата ГП предприятиям-изготовителям образуют систему послепродажного сервиса.

В процессах производства и сбыта ГП возникают так называемые *вторичные МР*, состоящие из отходов производства (возвратных и невозвратных) и отходов непроизводственного и личного потребления. Вторичные МР образуют специфические материальные потоки, управление которыми в настоящее время также относится к функциям логистической системы компании.

Рис. 4.17. Функции логистической системы предприятия

Современные ЛС не могут функционировать *без информационно-компьютерной поддержки*. Во многом именно электронная обработка информации о материальных и финансовых потоках, автоматизация документооборота при организации товародвижения, планирование, организация, регулирование, учет, контроль и анализ материальных потоков с помощью ЭВМ в снабжении, производстве и сбыте обеспечивают эффективное функционирование логистической системы предприятия.

Экономико-математическая модель определения оптимальной стратегии управления запасами основывается на разработанном ранее алгоритме решения задачи нахождения оптимальной стратегии управления запасами для нестационарной детерминированной системы. Предложенный алгоритм разработан для обобщенной нестационарной детерминированной системы управления запасами, описанной в разделе 4.2 настоящей главы, однако этот алгоритм может быть использован в решении задачи нахождения оптимальной стратегии для любых частных случаев систем из рассматриваемого класса нестационарных детерминированных систем управления запасами.

Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 4.15. Решение задачи нахождения оптимальной стратегии управления запасами реализуется в рамках функции *управление закупками* (см. рис. 4.17).

Принципиальная схема функционирования подразделений логистики предприятия позволяет формализовать процессы взаимодействия подразделения, выполняющего функции управления закупками, с остальными подразделениями предприятия в рамках решения задачи нахождения и реализации оптимальной стратегии управления запасами в условиях нестационарности.

Для представления принципиальной схемы определения и реализации оптимальной стратегии управления запасами используем стандарт описания функциональных моделей IDEF0. Диаграмма нулевого уровня этой схемы представлена на рис. 4.18. На данной диаграмме на основании входящих информационных потоков силами исполнителей под воздействием внешнего управления решается задача определения и реализации оптимальной стратегии управления запасами для нестационарной детерминированной системы (блок A0). Результатом работы модели является реализованная стратегия управления запасами.

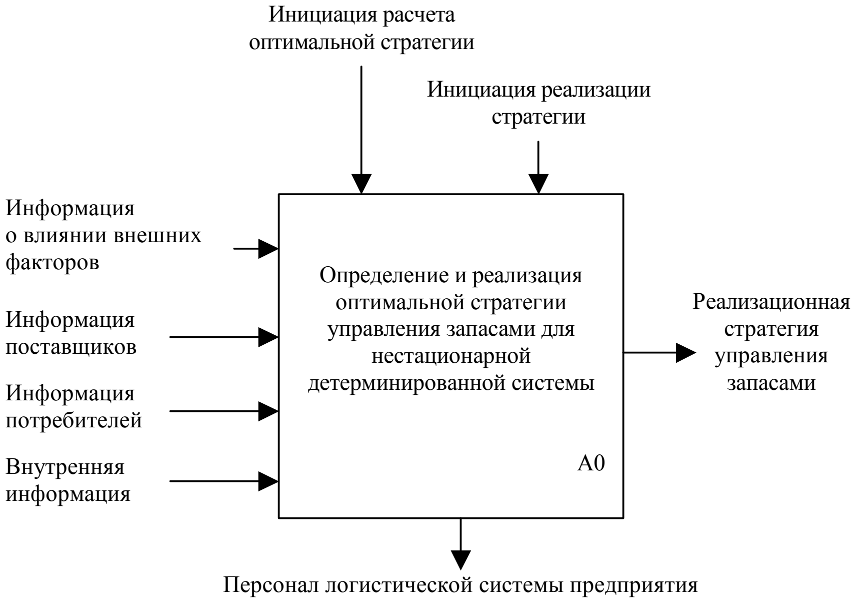

Рис. 4.18. Диаграмма нулевого уровня принципиальной схемы определения и реализации оптимальной стратегии управления запасами (уровень 0)

Входящие информационные потоки для модели:

- информация о влиянии внешних факторов: конъюнктура рынка, конкуренты, цены, инфляция, законодательство, экономическая и политическая стабильность и т. п.;
- информация поставщиков: цена закупки продукции, минимальный и максимальный объем поставки, размер стандартной упаковки, стоимость транспортировки, время поставки и т. п.;
- информация потребителей: величина потребности в продукции;
- внутренняя информация: объем складских помещений, размер бюджета на создание и поддержание материального запаса, стоимость хранения продукции и т. п.

Управлением в данной схеме является инициация определения оптимальной стратегии управления запасами и ее реализации. Инициирует данные процессы обычно руководство логистической подсистемы предприятия, сотрудники которой являются исполнителями указанной функции.

Декомпозиция блока А0 рассматриваемой принципиальной схемы представлена на рис. 4.19.

В блоке А1 решается задача нахождения оптимальной стратегии управления запасами в условиях нестационарности. Для расчета оптимальной стратегии используется информация о влиянии внешних факторов, информация поставщиков, информация потребителей, внутренняя информация компании. Результатом выполнения данной функции является расчетная оптимальная стратегия управления запасами, представляющая собой план закупок продукции на отчетный период, а также расчетные значения параметров системы управления запасами, на основании которых была определена указанная оптимальная стратегия.

В блоке А2 расчетная оптимальная стратегия реализуется, т. е. выполняется план закупок продукции, выработанный в блоке А1. Результатом выполнения данной функции является реализованная стратегия управления запасами (выход О1), которая может отличаться от расчетной стратегии из-за влияния непредвиденных факторов.

В процессе реализации стратегии управления запасами проводится анализ отклонений реализуемой стратегии от расчетной (блок А3). Это связано с тем, что при наличии таких отклонений реальное состояние складской системы в определенные моменты времени будет отличаться от расчетных состояний. Поэтому дальнейшая реализация расчетной стратегии уже не позволит достигнуть максимальной эффективности управления материальными запасами в ПСС. Таким образом, может возникнуть необходимость в повторном расчете оптимальной стратегии управления запасами с учетом реально складывающейся ситуации. В данном случае результатом работы блока А3 является инициация повторного расчета оптимальной стратегии управления запасами.

В процессе реализации стратегии управления запасами также проводится анализ отклонений реальных параметров системы управления запасами от расчетных (блок А4). Это связано с тем, что оптимальная стратегия управления запасами определена на основании расчетных значений стационарных и нестационарных параметров системы на плановый период (определяются в блоке А1). Если в какие-то моменты времени наблюдается отклонение реальных значений данных параметров от расчетных, то определенная ранее стратегия уже не будет оптимальной и не позволит достигнуть максимальной эффективности управления материальными запасами в ПСС. В этом случае результатом выполнения функции А4 является инициация повторного расчета оптимальной стратегии управления запасами с учетом реально складывающихся условий.

Декомпозиция блока А1 («Определение оптимальной стратегии управления запасами») представлена на рис. 4.20.

Функция «Определение оптимальной стратегии управления запасами» включает три подфункции:

- определение значений стационарных и нестационарных параметров системы управления запасами на плановый период (блок А11);
- постановка задачи нахождения оптимальной стратегии управления запасами (блок А12);
- решение задачи нахождения оптимальной стратегии управления запасами (блок А13).

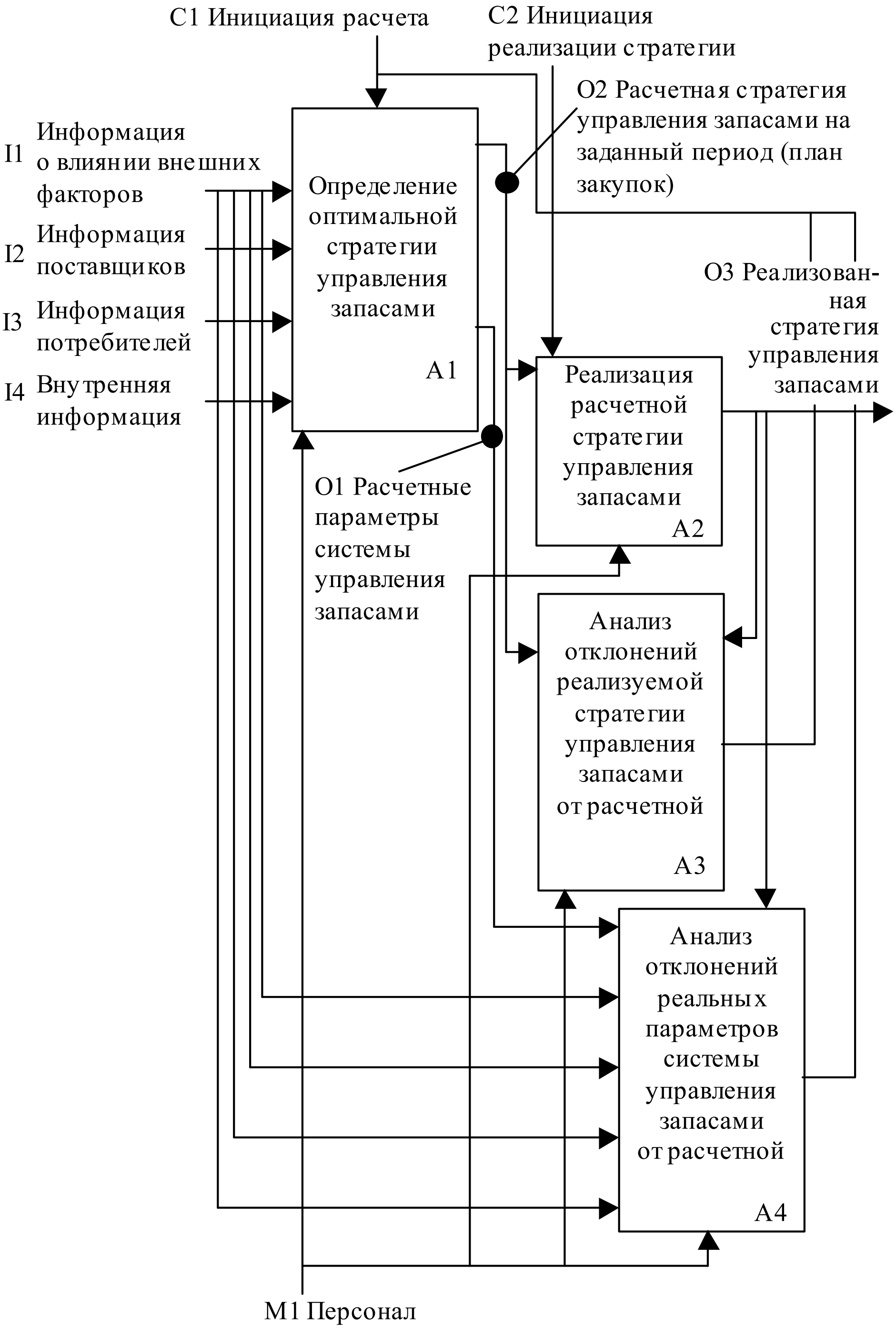

Рис. 4.19. Декомпозиция блока А0 принципиальной схемы

Рис. 4.20. Декомпозиция блока A1 принципиальной схемы

В блоке A11 на основе информации о влиянии внешних факторов, информации поставщиков, информации потребителей и внутренней информации определяются значения стационарных и нестационарных параметров системы управления запасами на плановый период. Описание параметров обобщенной системы управления запасами в условиях нестационарности приведено в настоящей главе в разделе 6.2.

В блоке A12 на основе полученных в блоке A11 значений параметров формулируется задача нахождения оптимальной стратегии управления запасами. Постановка задачи нахождения оптимальной стратегии управления запасами нестационарной детерминированной системы для решения методом динамического программирования описана выше в настоящем разделе.

В блоке A13 решается сформулированная в блоке A12 задача нахождения оптимальной стратегии управления запасами. Описание алгоритма решения поставленной задачи на основе метода динамического программирования приведено выше.

На рис. 4.15 представлена блок-схема алгоритма нахождения оптимальной стратегии управления запасами для нестационарной детерминированной системы, описывающая выполнение функций A11, A12, A13.

Функция определения оптимальной стратегии управления запасами (блок A1) выполняется подразделением отдела логистики, отвечающим за управление закупками (см. рис. 4.16), однако внутренняя информация (I4), на основании которой определяется оптимальная стратегия управления запасами, поступает от всех подразделений, участвующих в процессе создания и поддержания материального запаса:

- подразделение, отвечающее за *транспортировку*, определяет емкость транспортной единицы, стоимость перевозки груза одной транспортной единицей;
- подразделение, отвечающее за *обеспечение запасными частями и сервисом, управление производственными процедурами, физическое распределение*, определяет потребность в продукции на планируемый интервал времени *T*;
- подразделение, отвечающее за *складирование*, определяет емкость склада, стоимость хранения единицы продукции на складе в единицу времени, размеры стандартной складской упаковки;
- подразделение, отвечающее за *ценообразование*, определяет стоимость единицы продукции.

Функция реализации расчетной стратегии управления запасами (блок A2) выполняется подразделениями отдела логистики, отвечающими за *управление закупками, управление запасами, транспортировку, складирование*.

Функции анализа отклонений реализуемой стратегии от расчетной (блок A3) и анализа отклонений реальных параметров системы управления запасами от расчетных (блок A4) выполняются подразделением отдела логистики, отвечающим за *управление закупками*.

В течение планового периода времени расчетная стратегия будет постоянно проверяться на актуальность и корректироваться в соответствии с реальной ситуацией. В результате в каждый момент времени предприятие будет реализовывать стратегию управления запасами, оптимальную в складывающихся условиях. В конечном итоге совокупные затраты на создание и поддержание материальных запасов в течение планового периода будут минимальны, а оборачиваемость запаса будет оптимальной.

Разработанная организационно-экономическая система управления материальными потоками позволяет определять и реализовывать оптимальную стратегию управления запасами в нестационарных детерминированных системах, что повышает организационно-экономическую устойчивость предприятия.

Литература к главе 4

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.— 550 с.

2. *Вентцель Е.С.* Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964. — 175 с.

3. *Волков И.К., Загоруйко Е.А.* Исследование операций: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 436 с.

4. *Душкесас Р.Ф.* Проблемы устойчивости в классической модели управления запасами. Дипломная работа. М.: МИНХ им. Г.В. Плеханова, факультет экономической кибернетики, 1977. — 70 с.

5. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2000 — 407 с.

6. *Калихман И.Л., Войтенко М.А.* Динамическое программирование. — М.: Высшая школа, — 1979.

7. Логистика: Учебное пособие / Под. ред. Б.А. Аникина. — М.: ИНФРА-М, 1997. — 327 с.

8. Логистикоориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде / И.Н. Омельченко, А.А. Колобов, А.Ю. Ермаков и др. Под редакцией А.А. Колобова. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. — 204 с.

9. *Неруш Ю.М.* Коммерческая логистика: Учебник для вузов. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. — 271 с.

10. *Орлов А.И., Пейсахович Э.Э.* Некоторые модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса // Экономика и математические методы. 1975. Т.XI. № 4. С. 681–694.

11. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

12. *Орлов А.И., Конюхова Т.А.* Математические модели в экономике: Модель Вильсона управления запасами. — М.: МГИЭМ (ту), 1994. — 31 с.

13. *Орлов А.И.* Эконометрика.— М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

14. *Орлов А.И.* Менеджмент. Учебник. — М.: Изд-во «Изумруд», 2005. — 298 с.

15. Промышленная логистика. Логистикоориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде / И.Н. Омельченко, А.А. Колобов, А.Ю. Ермаков, А.В. Киреев, Под ред. А.А. Колобова. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. — 204 с.

16. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. — СПб.: Питер, 2001. — 384 с.

17. *Сергеев В.И.* Логистика в бизнесе: Учебник. — М.: ИНФРА-М, 2001. — 608 с.

18. *Шеремет А.Д., Сайфулин Р.С., Негашев Е.В.* Методика финансового анализа. — М.: ИНФРА-М, 2001. — 208 с.

19. Экономический анализ: Учебник для вузов / Под ред. Л.Т. Гиляровской. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 527 с.